Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ.

~~ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ~~
ΦΟΙΤΗΤΗΣ Μ.Π.Ι.

---

1. Έστω η απεικόνηση του R_+^* στον εαυτό του, με τύπο: $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$

Να υπολογιστούν τα $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$ και $f(2)$.
Είναι η απεικόνηση 1-1; Είναι μονότονη στο R_+^* ;
Είναι "επί";

Λ Υ Σ Η

$f(\frac{1}{2})=\frac{17}{4}$ $f(1)=2$, $f(2)=\frac{17}{4}$

Αφού $f(\frac{1}{2})=f(2)$ δεν είναι 1-1 γιατί θα έπρεπε απ'τον $f(\alpha)=f(\beta)$ να έχουμε πάντα $\alpha=\beta$
Για τη μονοτονία θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία του R_+^* τα $\frac{1}{2}$, και 1. Τότε $\frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{9}{2}$ ενώ για τα στοιχεία 1,2 έχουμε $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{9}{4}$. Δηλ. ο λόγος μεταβολής δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R_+^* άρα δεν είναι μονότονη, στο R_+^*
Για να είναι "επί" στο R_+^* πρέπει για $\mu\in R_+^*$ η εξίσωση $f(x)=\mu$ να έχει πάντα λύση. Η εξίσωση αυτή γράφεται: $x^2+\frac{1}{x^2}=\mu$ ή $x^4-\mu x^2+1=0$. Είναι διτετράγωνη με επιλύουσα την $y^2-\mu y+1=0$. Αυτή όμως δεν δέχεται πάντα λύση, γιατί η διακρίνουσα της $\Delta=\mu^2-4$ είναι αρνητική στο $(0,2)$. Άρα η $f(x)=x+\frac{1}{x}$ δεν είναι "επί" στο R_+^* (π.χ. ο αριθμος 1 δεν είναι εικόνα κανενός $x\in R_+^*$ μέσω της $f(x)$).

2.

Έστω η $f: N \to R$: $f(0)=4$

$f(n+1)-f(n)=f(n) \quad \forall n \geq 0.$

1. Να βρεθούν τα $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.
2. Να υπολογιστεί το $f(n)$ συναρτήσει του n.
3. Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty} f(n)$
4. Να δειχτεί $f(n).f(m)=4f(n+m)$

(Bacc. Aix-en-Provence)

ΛΥΣΗ

1. $f(n+1)=2f(n)$ άρα $f(1)=8$ $f(2)=16$ $f(3)=32$ $f(4)=64$
2. $f(n)=2f(n-1)$ Με πολ/σμό κατά μέλη:

   $f(n-1)=2f(n-2)$ $\quad f(n)=2^n.f(0)=2^n.4=2^{n+2}$

   ....

   $f(2)=2f(1)$

   $f(1)=2f(0)$

3. $\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{n\to\infty} 2^{n+2}=+\infty$
4. $f(n).f(m)=2^{n+2}.2^{m+2}=2^{n+m+4}=2^2.2^{n+m+2}=4f(n+m)$

3.

Για Γ'Λυκείου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5x^2-2x-15$.

Να υπολογιστεί το $f(x)-f(2)$, και να παραγοντοποιηθεί η διαφορά αυτή.

Να δειχτεί ότι αν $|x-2|<\frac{7}{5}$ έχουμε $|x|<\frac{17}{5}$ και

$|f(x)-f(2)| \leq 25|x-2|$. Να συμπεράνετε ότι η f(x) είναι συνεχής στο x=2

(Classes de premiere C,D et E)

ΛΥΣΗ

$f(x)-f(2)=5x^2-2x-16=5(x-2)(x+\frac{8}{5})$

$|x-2|<\frac{7}{5} \Rightarrow -\frac{7}{5}<x-2<\frac{7}{5}$ ή $\frac{3}{5}<x<\frac{17}{5}$ δηλ. $|x|<\frac{17}{5}$

Επίσης $|f(x)-f(2)|=5\,|x-2|\,.\,|x+\frac{8}{5}|$ και επειδή

$|x+\frac{8}{5}| \leq |x| + \frac{8}{5} < \frac{17}{5} + \frac{8}{5} = 5$ έχω τελικά

$|f(x)-f(2)| \leq 25\,|x-2|$ (3) Εστω λοιπόν ένας $\varepsilon > 0$

έχω $25|x-2|<\varepsilon$ αν $|x-2|<\frac{\varepsilon}{25}$ (4)

Εστω ένας δ ο, μικρότερος απ'τους αριθμούς $\frac{\varepsilon}{25}$ και $\frac{7}{5}$

δηλ. $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{25}, \frac{7}{5}\}$

Για $|x-2|<\delta$ οι τύποι (3) και (4) γίνονται

$|f(x)-f(2)| \leq 25\,|x-2|<\varepsilon$

Θα συμπεραίνουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ώστε για

$|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(2)| < \varepsilon$ Αρα η f(x) συνεχής στο x=2

4.

Δίνονται τα σύνολα $A=\{-1,0,1\}$ και $B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$
Ονομάζουμε F το σύνολο των απεικονίσεων f απ'το A στο B που είναι 1-1 και πληρούν την:

$\forall x \in A, \quad f(x)+f(-x)=2$

Να καθοριστεί το σύνολο F με τη βοήθεια του γραφήματος καθε στοιχείου του.

(Classes de première)

Λ Υ Σ Η

Απ'τη δοθείσα σχέση προκύπτει για $x=0$: $f(0)+f(0)=2$ f (0)
Λαμβάνοντας υπ'όψη. ότι η απεικόνιση f θα είναι 1-1 σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$f(1)$	$f(-1)$	$f \in F$
-2	4	οχι: $4 \notin B$
-1	3	ναι
0	2	ναι
1	1	οχι: η f δεν είναι 1-1
2	0	ναι
3	-1	ναι

Το σύνολο λοιπόν F αποτελείται από 4 στοιχεία των οποίων τα γραφήματα είναι:

$\{(1,-1)\ (0,1)\ (-1,3)\}$ $\{(1,0)(0,1)(-1,2)\}$
$\{(1,2),(0,1)(-1,0)\}$ $\{(1,3),(0,1),(-1,-1)\}$

Μια απεικόνιση του R^2 στο R η g πληρεί τις σχέσεις $g(2,1)=g(-2,2)$ και $g(3,2)=1$. Επί πλέον είναι γραμμική.

Να υπολογιστεί η $g(x,y)$ συναρτήσει των x και y

(Classes de premiere C,D,I

ΛΥΣΗ

Γραμμική σχέση σημαίνει: $g(x,y)=g(x,0)+g(0,y)$ και $g(x,y)=xg(1,0)+yg(0,1)$ (1) και $-g(x,y)=g(-x,-y)$

Άρα πρέπει να προσδιορίσουμε τα $g(1,0)$ και $g(0,1)$

Έχουμε $g(2,1)=g(-2,2) \Rightarrow g(2,1)-g(-2,2)=0$

$g(4,-1)=0$ και λόγω της (1) $4g(1,0)-g(0,1)=0$ (2)

Η άλλη δοθείσα γράφεται $3g(1,0)+2g(0,1)=1$ (3)

Απ' τις (2) και (3) έχω $g(1,0)=\frac{1}{11}$ $g(0,1)=\frac{4}{11}$ $g(x,y)=\frac{1}{11}(x+4y)$

Θεωρούμε την απεικόνιση του N στο Z που ορίζεται:

$$\begin{cases} x\in N: f(x)=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x \text{ είναι άρτιος} \\ x\in N: f(x)=-\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

1. Να υπολογιστούν τα $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

2. Να δειχτεί ότι η απεικόνιση $f(x)$ ειναι 1-1
3. Να βρεθεί η τιμή του $f(x)+f(x+1)$ $\forall x \in N$
4. 'Εστω η ένας φυσικός αριθμός. Να υπολογιστεί το άθροισμα: $S=f(0)+f(1)+\dots\dots\dots f(n)$

ΛΥΣΗ

1. $f(0)=0$ $f(1)=-1$ $f(2)=1$ $f(3)=-2$ $f(4)=2$
2. Αν $y \in Z$ και είναι y θετικός η μηδέν τότε το y αυτό, είναι εικόνα ενός μόνου $x \in N$, γιατί η εξίσωση $\frac{x}{2}=y$ με άγνωστο το x έχει μία μόνο λύση.
Αν το y είναι αρνητικός τότε αυτό είναι εικόνα του x, που πληρεί την εξίσωση $-\frac{x+1}{2}=y$ που έχει τη μοναδική λύση που ανήκει στο Ν $x=-2y-1$.
Αρα σε κάθε περίπτωση το $y \in Z$ είναι εικόνα ενός μόνο στοιχείου του N. Δηλ. η f είναι 1-1
3. $f(x)+f(x+1)=\frac{x}{2}-\frac{(x+1)+1}{2}=-1$ αν x άρτιος
και $f(x)+f(x+1)=-\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}=0$ αν x περιττός
4. Το $S=[f(1)+f(2)]+[f(3)+f(4)]+\dots\dots[f(n-1)+f(n)]$

η είναι άρτιος οπότε απ'το προηγούμενο κάθε αγκύλη είναι μηδέν άρα $S=0$

Αν το η είναι περιττός $S=[f(1)+f(2)]+[f(3)+f(4)]+\dots$
$[f(n-2)+f(n-1)]+f(n)=f(n)=-\frac{n+1}{2}$

'Εστω f η απεικόνιση του $N \to R$ με τύπο $f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f
2. Να δειχτεί ότι $f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
3. Να υπολογιστεί $f(1)+f(2)$, $f(1)+f(2)+f(3)$, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

Εστω ότι $f(1)+f(2)+\dots\dots f(n) = \frac{n}{n+1}$. Ποιό είναι το όριο του αθροίσματος αυτού όταν $n \to +\infty$;

(Bacc.A.Lille)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $f(n+1)-f(n) = \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \right) =$

$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} < 0$ άρα

είναι γνησίως φθίνουσα.

2. $f(n) = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

3. $f(1)+f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ $\quad f(1)+f(2)+f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$f(1)+f(2)+\dots\dots\dots f(n) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ άρα το όριο του

αθροίσματος αυτού ειναι το 1.

8.

Εστω η εξίσωση $\frac{2x+3}{x-1}=\mu$ $\mu, x, \in R$. Να δειχτεί ότι για κάθε τιμή του μ, εκτός από μία η οποία να προσδιοριστεί αυτή η εξίσωση δέχεται μία μόνο λύση την οποία να υπολογίσετε συναρτήσει του μ. Απ' αυτά να εξαχθεί ότι η

$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ είνια 1-1 του $R-\{1\}$ "επί" του $R-\{2\}$.
Ποιά είναι η αντίστροφη της f ;

(Classes de première C,D,E.)

Λ Υ Σ Η

Είναι $2x+3=\mu(x-1)$ ή $(\mu-2)x=\mu+3$ για $x\neq 1$
Αν $\mu\neq 2$ υπάρχει η μοναδική λύση $x=\frac{\mu+3}{\mu-2}$
Αν $\mu=2$ δεν υπάρχει λύση
Αφού ο f(x) μπορεί πάντα να προσδιοριστεί εκτός αν $x=1$, και είναι κάποιος πραγματικός αριθμός εκτός του 2, η $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ είναι συνάρτηση "επί" του $R-\{2\}$

με πεδίο ορισμού το $D=R-\{1\}$. Επίσης κάθε $\mu\in R-\{2\}$ είναι εικόνα ενός μόνου στοιχείου $R-\{1\}$ του $x=\frac{\mu+3}{\mu-2}$

Αρα είναι 1-1

Η $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$ του $R-\{2\} \rightarrow R-\{1\}$

9.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

1. Να εκφραστούν οι συναρτήσεις h=gof και l=fog και να βρεθεί το πεδίο ορισμού τους.
2. Να εξεταστεί η συνέχεια των h και l (Γ΄Λυκείου)

(Bacc. A, Besancon)

Λ Υ Σ Η

1. $h(x)=(gof)\ (x)=g(f(x)) = g(\frac{2x-1}{x+2})=\frac{1}{2}\ (\frac{2x-1}{x+2})^2$

$D_h=D_f=R-\{-2\}$

$l(x)=(fog)\ (x)= f(g\ (x)) = f(\frac{x^2}{2})\ \frac{2(x^2-1)}{x^2+4}$ με $D_l=R$

2. Απλή

10

Έστω η συνάρτηση $f : N \to R$ που ορίζεται:

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ 2f(n)=f(n-1)+5 \end{cases}$$

και έστω η $g: N \to R$ με $g(n)=f(n)-5$

1. Να δειχτεί ότι $g(n)=\frac{1}{2}g(n-1)$
2. Να εκφραστεί το $g(n)$ συναρτήσει του n.
3. Να βρεθεί το $\lim g(n)$ του $n \to +\infty$
   Ομοίως για την $f(n)$

(Bacc. A, Montellier)

ΛΥΣΗ

1. $2g(n)=2f(n)-10=f(n-1)+9-10=f(n-1)-5=g(n-1)$
   δηλ. $g(n)=\frac{1}{2}\, g(n-1)$ με $g(0)=f(0)-5=-3$
2. $g(n)=\frac{1}{2}g(n-1)$ Με πολλαπλασιασμό έχω
   $g(n-1)=\frac{1}{2}g(n-2)$ $g(n)=(\frac{1}{2})^n g(0)=-3.(\frac{1}{2})^n$
   ....
   $g(1)=\frac{1}{2}g(0)$
   Αρα $f(n)=g(n)+5=-3(\frac{1}{2})^n+5$
3. $\lim_{n\to\infty} g(n)=0$ $\lim_{n\to\infty} f(n)=5$

'Εστω η $y=f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της

β. Να βρεθεί το $f(x)+f(-x)$ και να ερμηνευτεί

γ. Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη της f

(Bacc.E, Besançon)

Λ Υ Σ Η

1. Πεδίο ορισμού το $R-\{0\}$. Είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και $(0,\infty)$
   Στα άκρα του πεδίου ορισμού έχουμε την ακόλουθη συμπεριφορά.
   $x \to -\infty \quad e^x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0^-$
   $x \to 0^- \quad e^x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$
   $x \to 0^+ \quad e^x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$
   $x \to +\infty \quad e^x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 1$
2. $f(x)+f(-x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}+\dfrac{1}{1-e^x}=1$ Αυτο γραφικά σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είνια συμμετρικά ως προς το σημείο $I(0,\frac{1}{2})$
3. Απ'την $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ $\quad e^x(y-1)=y$ $\quad y\neq 1.$ $\quad x=\log\dfrac{y}{y-1}$

   η $f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{x-1}$

Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι το $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ αφού πρέπει $\frac{x}{x-1}>0$ και $x\neq 1$

12. Για Γ' Λυκείου

1. Να βρεθεί το όριο L της $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}$ όταν $x\to 0$

2. Εστω $f_1(x)=\begin{cases} f_1(x)=f(x) & \text{για } x\neq 0 \\ f_1(0)=L & \text{για } x=0 \end{cases}$

Να εξεταστεί αν είναι η $f_1(x)$ συνεχής (και παραγωγίσιμος στο $x=0$)

(Bacc.D.Amiens)

ΛΥΣΗ

1. Για $x\neq 0$ η $f(x)$ γράφεται

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\ 1+x\ +1)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=L=0$

2. Τώρα $f_1(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x} & \text{για } x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

1. Έστω $(\alpha,\beta)\subset(-\infty,0]$. Είναι $f(\alpha)=\alpha^2-1$, $f(\beta)=\beta^2-1$ και $f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^2-\beta^2$ και $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta$

Εχουμε $\alpha+\beta\leq 0$ διότι $\alpha\leq 0$ και $\beta\leq 0$ Επίσης $\alpha+\beta<0$ γιατί $\alpha\neq\beta$ Αρα

$\forall(\alpha,\beta)\subset R_-$: $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<0$ δηλ. η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R_-

Επίσης έστω $(\alpha,\beta)\subset(0,+\infty)$

$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{\alpha+1}{\alpha}-\frac{\beta+1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{-(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\Rightarrow\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=-\frac{1}{\alpha\beta}<0$$

ομοίως γν. φθίνουσα στο $(0,\infty)$

Αν η $f(x)$ ήταν γν. φθίνουσα στο R θα έπρεπε $\forall(\alpha,\beta)\subset R$

$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<0$

Ομως για $\alpha=-1$ και $\beta=+1$ έχουμε $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=1$

Αρα δεν είναι γν. φθίνουσα στο R

2. Απ' τον ορισμό της συνάρτησης η εξίσωση πρέπει να μελετηθεί στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $(0,+\infty)$

Στο $(-\infty,0]$ γίνεται $x^2-1=1$ $\quad x=-\sqrt{2}$

Στο $(0,\infty)$ γράφεται $\frac{x+1}{x}=1$ που δεν έχει λύση.

Αυτή είναι συνεχής για $x \neq 0$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και συνεχής στο 0, αφού $\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0 = f_1(0)$

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Για την παράγωγο στο 0 εξετάζω το $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

Είναι $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$

άρα $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

13.

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \forall x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \forall x > 0 \end{cases}$

1. Να δειχτεί ότι είναι αυστηρώς φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Είναι φθίνουσα σ'όλο το R ;
2. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$
3. Να διερευνηθεί η εξίσωση $f(x) = \mu$ για τα διάφορα μ.
4. Είναι η f, 1-1; Ποιό είναι το πεδίο τιμών της;
5. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου μ, για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \mu$ δέχεται δύο αντίθετες ρίζες.

(Classes de premiere A,B)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

38. Έστω στο Καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία $A(1,0)$ $B(3/2, +1/2)$ $\Gamma(3/2, -1/2)$ και η ευθεία D με εξίσωση $\chi=1$.

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε $\vec{\Gamma\Delta}=\vec{AB}$. Τι είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ ;

2. Έστω (Π) το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου με συντεταγμένες (χ,ψ) που πληρούν τη σχέση

$$-MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = 2(\chi-1)^2$$

α. Δείξτε ότι τα Β και Γ ανήκουν στο (Π)

β. Δείξτε ότι τα (Π) είναι το σύνολο των σημείων Μ, ώστε : $M\Delta= 2\delta(M,D)$ όπου $\delta(M,D)$ είναι η απόσταση του Μ απ την ευθεία D.

γ. Να συμπεράνετε το είδος της καμπύλης που δημιουργεί το σύνολο (Π) και να καθοριστούν τα χαρακτηριστικά της στοιχεία.

(BACC. C, AIX- EN- PROVENCE)

ΛΥΣΗ.

1 Είναι $\Delta(2,0)$. Το τετράπλευρο είναι παρ/μο.

2. α. Είναι $-(x-1)^2-y^2+(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=2(x-1)^2$ $\Leftrightarrow x^2-y^2=2$ (υπερβολή) Προφανώς τα Β και Γ ανήκουν στην υπερβολή (Π). **β.** Αν $M(x,y)$: η $M\Delta=\sqrt{2}\,d(M,D) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{2}\,|x-1| \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=2(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-y^2=2$ δηλ. $M\in(\Pi)$

γ. Απ τα προηγούμενα προκύπτει ότι το (Π) είναι μια ισοσκελής υπερβολή με $a=\sqrt{2}$ $b=\sqrt{2}$ $\gamma=2$ που έχει την ευθεία D, διευθετούσα της εστίας $E(\gamma,0)$.

---

39. α Εστω Α(0, 17/4). Να γραφεί η εξίσωση των ευθειών που περνούν απ το Α. (παράμετρος μ) Για ποιά μ, οι αντίστοιχες ευθείες, εφάπτονται στην (P) : $\psi=-\chi^2+2\chi+3$;

β. Να δειχτεί ότι απ το Α περνούν δύο εφαπτόμενες της (P) κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθούν τα σημεία επαφής (τομής) με τους άξονες.

γ. Εστω Β, σημείο της παράλληλης προς τον Οχ, απ΄το Α. Να δειχτεί ότι οι εφαπτόμενες απ΄το Β, στην (P) είναι κάθετες μεταξύ τους.

(BACC. LIBANAIS)

ΛΥΣΗ

α. Οι ευθείες απ το Α είναι: $y=\mu x+\frac{17}{4}$. Τα κοινά τους σημεία με την (P) θα δίνονται απ τη λύση της εξίσωσης (οι τετμημένες) : $-x^2+2x+3=\mu x+\frac{17}{4}$. Για να έχουμε επαφή, πρέπει αυτή να έχει διπλή ρίζα δηλ. $\Delta=0 \Leftrightarrow$ $(\mu-2)^2-5=0 \Leftrightarrow \mu'=2-\sqrt{5}$ $\mu''=2+\sqrt{5}$.

β. Τα μ', μ'' είναι συντελεστές κατεύθυνσης των δύο εφαπτόμενων απ το Α. Και είναι $\mu'\cdot\mu''=-1$. Άρα είναι κάθετες μεταξύ τους. Τέμνουν τον Οx στά $\frac{17(\sqrt{5}+2)}{4}$, $\frac{17(2-\sqrt{5})}{4}$ αντί-στοιχα.

γ. Αν λ οι συντελεστές κατεύθυνσης των ευθειών που περνούν απ' το $B(\alpha, \frac{17}{4})$. Τότε έχουν εξίσωση: $y = \lambda(x-\alpha) + \frac{17}{4}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων τους με την (P) δίνονται απ τη λύση της εξίσωσης:

$-x^2+2x+3 = \lambda(x-\alpha)+\frac{17}{4}$ ή $x^2+(\lambda-2)x-\lambda\alpha+\frac{5}{4}=0$. Άρα έχω επαφή όταν $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda(1-\alpha)-1=0$. Οι ρίζες αυτής έχουν γινόμενο $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ και σημαίνει ότι οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι κάθετες.

---

40. Δίνεται ορθογώνιο σύστημα αναφοράς χΟψ και ένας κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R. Έστω ένα σημείο M, πάνω στο κύκλο, που ορίζεται απ' τη γωνία $\alpha=(\widehat{O\chi, OM})$. Οι ορθές προβολές του M, στους Οχ, Οψ είναι τα P, Q.

α. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής I, της PQ και της εσωτερικής διχοτόμου της χOM.

β. Να υπολογιστεί το α ώστε ΟΓ=R/2 (ΟΓ η τετμημένη του I).

(BACC. A,B TOULOUSE)

ΛΥΣΗ

α. Η ευθεία PQ έχει εξίσωση $\frac{x}{R\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{y}{R\eta\mu\alpha} = 1$ και η διχοτόμος της $x\hat{O}y$: $y = x \cdot \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

Άρα το I έχει τετμημένη $x = R/\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}\right]$ και τεταγμένη $y = R\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}/\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}\right]$.

β. Πρέπει να ισχύει

$$R\Big/\left[\frac{1}{συνα}+\frac{1}{2συν^2\frac{α}{2}}\right]=\frac{R}{2} \Leftrightarrow \frac{R(1+συνα)συνα}{1+2συνα}=\frac{R}{2} \Leftrightarrow 2συν^2α=1$$

$\Leftrightarrow συνα=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ Δηλ $α=\frac{π}{4}$, $α=\frac{3π}{4}$, $α=\frac{5π}{4}$, $α=\frac{7π}{4}$.

---

41. Δίνονται σε ορθογώνιο σύστημα τα σημεία Α(μ, 2μ, 3) Β(1, 1+μ, μ) και το Γ(2μ+ , 1−μ, 2).

1. Να δειχτεί, ότι για οποιοδήποτε μ, μ, τα τρία σημεία είναι διακεκριμένα ανά 2

2. Για ποιά μ, οι ευθείες ΟΑ και ΒΓ είναι παράλληλες;

3. Για ποιά μ, οι ίδιες ευθείες εί- συνεπίπεδες; Σε ποιά περίπτωση τέμνονται;

(CLASSES DE PREMIÈRE C, D, E)

ΛΥΣΗ

1. Για οποιοδήποτε μ, έχουμε $z_A=3$ $x_B=1$, $z_Γ=2$. Άρα το σημείο Ο, είναι διακεκριμένο απ τα Α, Β, Γ.
Αν $x_A=x_B$ δηλ. $μ=1 \Rightarrow z_B=1\neq 3=z_A$ άρα πάντα $A\neq B$
Ομοίως έχουμε $A\neq Γ$ αφού $z_A=3\neq 2=z_Γ$ και τελικά $B\neq Γ$ γιατί αν $x_B=x_Γ \Rightarrow μ=0 \Rightarrow z_B=0\neq 2=z_Γ$.

2. Πρέπει τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{BΓ}$ να είναι συγγραμμικά: $\vec{OA}=μ\vec{i}+2μ\vec{j}+3\vec{k}$ $\vec{BΓ}=2μ\vec{i}-2μ\vec{j}+(2-μ)\vec{k}$
Είναι

$$D_1=\begin{vmatrix}2μ & 3\\ -2μ & 2-μ\end{vmatrix}=2μ(5-μ) \quad D_2=\begin{vmatrix}3 & μ\\ 2-μ & 2μ\end{vmatrix}=μ(μ+4), \quad D_3=-6μ^2$$

Πρέπει $D_1 = D_2 = D_3 = 0 \Rightarrow \mu = 0$. Έτσι αν $\mu = 0$ $\vec{OA} = 3\vec{k}$ και $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ δηλ. το Β δεν βρίσκεται πάνω στην ΟΑ, οπότε έχουμε περίπτωση καθαρής παραλληλίας.

3. Οι δυό ευθείες είναι συνεπίπεδες αν το διάνυσμα $\vec{OB}$, βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{OA}$ και $\vec{B\Gamma}$ που σημαίνει ότι

$$D_1 + (\mu+1)D_2 + \mu D_3 = 0 \iff \mu(-5\mu^2 + 3\mu + 14) = 0 \iff \mu = 2 \text{ ή } \mu = -\frac{7}{5}$$

Τελικά έχουμε: αν $\mu \notin \{0, 2, -\frac{7}{5}\}$ οι ευθείες ΟΑ, ΒΓ δεν είναι συνεπίπεδες. Αν $\mu = 0$ είναι παράλληλες, και αν $\mu = 0$ ή $\mu = -\frac{7}{5}$ είναι τεμνόμενες.

---

42. Εχουμε στο επίπεδο, ένα σύστημα Καρτεσιανό $(O, \vec{i}, \vec{j})$ όχι ορθοκανονικό, με $|\vec{i}| = 1$ και $|\vec{j}| = 2$. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την απόλυτη τιμή του $\vec{i}.\vec{j}$ και τι για το $\vec{i}.\vec{j}$; Υποθέτουμε ότι $\vec{i}.\vec{j} = -3/2$. Να εξαχθεί η εξίσωση της ευθείας (d) που περνάει απ' το σημείο Α(1,-1) και είναι ορθογώνια στο διάνυσμα $\vec{\eta} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Εστω Β το σημείο της (d) με τετμημένη 2. Να υπολογιστεί το συνημίτονο της γωνίας $(\widehat{\vec{j}, \vec{BO}})$.

(CLASSES DE PREMIÈRES A, C, D)

ΛΥΣΗ.

Η ανισότητα του Schwarz είναι: $|\vec{i}\cdot\vec{j}| \leq |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|$ και επειδή τα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα γίνεται

$|\vec{i}\cdot\vec{j}| < |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|$ δηλ. $|\vec{i}\cdot\vec{j}| < 2$ άρα $-2 < \vec{i}\cdot\vec{j} < 2$

<u>Εξίσωση της (d)</u>: Η ευθεία (d) είναι το σύνολο των σημείων M για τα οποία το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\eta}\cdot\vec{AM}=0$
Έστω M σημείο της με $M(x,y)$.
Έχουμε $\vec{\eta}\cdot\vec{AM}=(2\vec{i}-\vec{j})\left[(x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}\right]=2(x-1)|\vec{i}|^2-$

$-(y+1)|\vec{j}|^2+\left[2(y+1)-(x-1)\right]\vec{i}\cdot\vec{j}=2(x-1)-4(y+1)-\frac{1}{2}\left[2(y+1)-(x-1)\right]=$

$=\frac{7}{2}(x-2y-3)$. Μια εξίσωση της (d) είναι λοιπόν η
$x-2y-3=0$

<u>Το $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{j},\vec{BO}})$</u>: Απ' την $x-2y-3=0$ έχω $B(2,-\frac{1}{2})$.
Άρα $\vec{BO}=-2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\Rightarrow|BO|^2=(\vec{BO})^2=4|\vec{i}|^2+\frac{1}{4}|\vec{j}|^2-2\vec{i}\cdot\vec{j}=8$
$\Rightarrow\vec{j}\cdot\vec{BO}=-2\vec{i}\cdot\vec{j}+\frac{1}{2}|\vec{j}|^2=5.$
Δηλ. $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{j},\vec{BO}})=\frac{\vec{j}\cdot\vec{BO}}{|\vec{j}|\,|\vec{BO}|}=\frac{5}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{50}}{8}$.

43. Εστω $(O,\vec{i},\vec{j})$ ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο. Δίνονται και τα σημεία A, B, Γ, Δ έτσι ώστε $\vec{OA}=\vec{i}$ $\vec{A\Delta}=3\vec{i}$ $\vec{BO}=\vec{O\Gamma}=2\vec{j}$.

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των σημείων P και Q που είναι οι ορθές προβολές του O, πάνω στις AB και ΓΔ αντίστοιχα. Ποιό είναι το κοινό σημείο M των AB και ΓΔ;

(CLASSES DE PREMIÈRE C, D, E)

ΛΥΣΗ

<u>Υπολογισμός των P, Q</u> Να καθορίσουμε το P,

χρησιμοποιούμε τις δύο συνθήκες:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τα } \vec{AP}, \vec{AB} \text{ συγγραμμικά} \\ \vec{OP}\cdot\vec{AB}=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

Έστω (x,y) οι συντεταγμένες του P. Έχουμε τότε $\vec{AP}=(x-1)\vec{i}+y\vec{j}$. Επειδή $\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=-(\vec{i}+2\vec{j})$ η (1)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y-2x+2=0$$

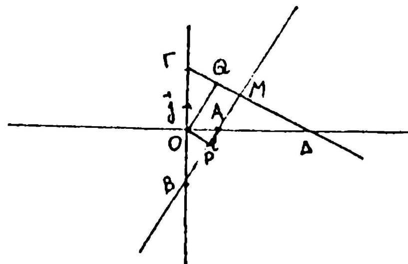
και η (2) $\Leftrightarrow -x-2y=0$.

Έχουμε λοιπόν το σύστημα $\left.\begin{array}{l}2x-y=2\\x+2y=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)$

και $\vec{OP}=\frac{2}{5}(2\vec{i}-\vec{j})$. Έχουμε $\vec{\Gamma\Delta}=2(2\vec{i}-\vec{j})$ άρα το $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλο του $\vec{OP}$ και ορθογώνιο στο $\vec{AB}$. Επειδή O είναι το μέσο της ΒΓ, τα P και Q μέσα αντίστοιχα των ΜΒ και ΜΓ και $\vec{PQ}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}=2\vec{j}$.

Άρα $\vec{OQ}=\vec{OP}+\vec{PQ}=\frac{2}{5}(2\vec{i}+4\vec{j})$ και οι συντεταγμένες του Q είναι $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$.

<u>Συντεταγμένες του Μ</u>: Έχουμε $\vec{OM}=\vec{OP}+\vec{OQ}=\frac{2}{5}(4\vec{i}+3\vec{j})$ δηλ. $M\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$.



44. Στον τριδιάστατο χώρο θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε $\vec{OA}=2\vec{i}$ $\vec{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ και $\vec{O\Gamma}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ όπου $(O, \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ τρισορθογώνιο σύστημα

1. Να δειχτεί ότι τα επίπεδα ΟΒΓ και ΑΒΓ είναι κάθετα.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που περιγράφεται στο τετράεδρο ΟΑΒΓ. Να δοθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας. (S)

3. Αν $p,q\in R$ έστω Μ το σημείο που ορίζεται απ' την $\vec{OM}=(p+q)(2\vec{i}-\vec{j})+(2p-q)\vec{k}$. Να δειχτεί ότι αν το (p,q) διαγράφει το R^2, το σημείο Μ διαγράφει ένα επίπεδο (Η) του οποίου να δοθεί η εξίσωση.

4. Να καθοριστεί το κέντρο και η ακτίνα, του κύκλου, που δίνει η τομή των (S) και (Η).

(BS)

ΛΥΣΗ.

1. Έχοντας $\vec{BA}=\vec{i}-\vec{j}$ τα γινόμενα $\vec{OB}\cdot\vec{BA}$ και $\vec{O\Gamma}\cdot\vec{BA}$ μηδενίζονται, έτσι το διάνυσμα $\vec{BA}$ είναι κάθετο στο επίπεδο ΟΒΓ. Αυτό σημαίνει, επειδή $\vec{BA}\in(BA\Gamma)$ ότι τα δυο επίπεδα κάθετα.

2. Η εξίσωση της σφαίρας είναι του τύπου
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2\gamma z=0$ γιατί περιέχει την αρχή Ο του συστήματος. Επειδή περνάει απ το Α: $4-\bar{a}\cdot 4=0 \Leftrightarrow a=1$ Ομοίως για το Β: $1+1-2a-2b=0 \Leftrightarrow b=0$ ομοίως $\gamma=\frac{1}{2}$.
Η (S) λοιπόν είναι: $x^2+y^2+z^2-2x-z=0$ ή αλλοιώς
$(x-1)^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$. Έχει λοιπόν κέντρο $E(1,0,\frac{1}{2})$ και ακτίνα ίση με $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Μπορούμε να γράψουμε για το $\vec{OM}$:

$\vec{OM} = p(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + q(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$.

Αφ' ετέρου τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = (2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα γιατί απ την $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda + \mu = 2\lambda - \mu = 0$ ή $\lambda = \mu = 0$.

Τα σημεία Μ λοιπόν βρίσκονται όλα, στο επίπεδο (Η) που περνάει απ την αρχή Ο, παράλληλο προς το επίπεδο των $\vec{u}, \vec{v}$. Το διάνυσμα $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j}$ είναι ορθογώνιο στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, γιατί είναι ορθογώνιο ξεχωριστά στα $2\vec{i} - \vec{j}$ και στο $\vec{k}$. Η εξίσωση του (Η) λοιπόν είναι : $x + 2y = 0$

4. Έστω F η ορθή προβολή του Ε (κέντρου σφαίρας) πάνω στο (Η). Έχουμε λοιπόν $|\vec{EF}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (απόσταση του Ε απ το Η).

Αφ' ετέρου μπορούμε να γράψουμε

$M \in (S) \cap (H) \Leftrightarrow |\vec{EM}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\vec{EF} \cdot \vec{FM} = 0$

Έχουμε $\vec{EM} = \vec{EF} + \vec{FM} \Rightarrow |\vec{EM}|^2 = |\vec{EF}|^2 + |\vec{FM}|^2 + 2\vec{EF} \cdot \vec{FM}$

οπότε $|\vec{EM}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\vec{EF} \cdot \vec{FM} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + |\vec{FM}|^2 = \frac{5}{4}$ και $M \in (H)$

Τελικά έχουμε $M \in (S) \cap (H) \Leftrightarrow |\vec{FM}| = \sqrt{\frac{21}{20}}$ και $M \in (H)$.

Άρα η ζητούμενη τομή είναι ο κύκλος με κέντρο F και ακτίνα $\sqrt{\frac{21}{20}}$.

Συντεταγμένες του F:

$\vec{EF} = (x-1)\vec{i} + y\vec{j} + (z - \frac{1}{2})\vec{k}$ και επειδή $F \in (H)$

$\vec{EF} = -(2y+1)\vec{i} + y\vec{j} + (z - \frac{1}{2})\vec{k}$. Το διάνυσμα $\vec{EF}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{n}$ οπότε

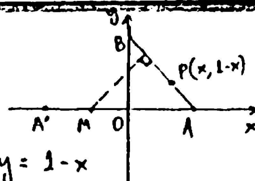
$y = -2(2y+1)$ και $z - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow F(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$.

45. Εστω το ορθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. Σημειώνουμε με M το σημείο που $\vec{OM}=\mu.\vec{OA}$ $\mu\in R$. Εστω P ένα μεταβλητό σημείο, με τετμημένη χ, πάνω στο τμήμα AB. Να υπολογιστεί η τεταγμένη του P συναρτήσει του χ. Να δειχτεί ότι το τετράγωνο του διανύσματος $\vec{MP}$ είναι ο αριθμός

$$f_\mu(\chi)=2\chi^2-2\chi(\mu+1)+\mu^2+1$$

Να υπολογιστεί συναρτήσει του μ, το ελάχιστο της $f_\mu(\chi)$ και να ερμηνευτούν γεωμετρικά τα αποτελέσματα της άσκησης.

(B .S)



ΛΥΣΗ.

AB: $x+y-1=0$ ⇒ τεταγμένη του P: $y=1-x$

Τετράγωνο του $\vec{\mu P}$: $\vec{OP}=x\vec{OA}+(1-x)\vec{OB}$ επίσης $\vec{OM}=\mu\vec{OA}$

άρα $\vec{MP}=\vec{OP}-\vec{OM}=(x-\mu)\vec{OA}+(1-x)\vec{OB}$

Άρα $(\vec{MP})^2=(x-\mu)^2+(1-x)^2=2x^2-2x(\mu+1)+\mu^2+1=f_\mu(x)$.

Ελάχιστο της $f_\mu(x)$: $f_\mu(x)=2\left(x-\frac{\mu+1}{2}\right)^2+\frac{(\mu-1)^2}{2}$

Επίσης έχουμε (1) $\forall x\in R,\ f_\mu(x)\geq f\left(\frac{\mu+1}{2}\right)=\frac{(\mu-1)^2}{2}$

Επίσης η $f_\mu(x)$ είναι φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{\mu+1}{2}\right)$ και αύξουσα στο $\left(\frac{\mu+1}{2},+\infty\right)$.

Το P αφού βρίσκεται στο AB ⇒ $x\in[0,1]$

Άρα θα βρώ το ελάχιστο της $f_\mu(x)$ για $x\in[0,1]$.

Αν $\frac{\mu+1}{2}\in[0,1]$ ⇔ $\mu\in[-1,1]$ το ελάχιστο είναι $\frac{(\mu-1)^2}{2}$ από την (1).

Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς O. Η προηγούμενη προϋπόθεση γράφεται $\forall M\in[A',A]$ το ελάχιστο της $f_\mu(x)$ είναι $\frac{(\mu-1)^2}{2}$. Βλέπουμε εύκολα ότι το ελάχιστο αυτό

είναι το τετράγωνο της απόστασης του M απ την ευθεία (AB).

Υποθέτοντας $\mu < -1$, σημαίνει ότι το M αριστερά του A'. Τότε $\frac{\mu+1}{2} < 0$ έχουμε λοιπόν την κατάληξη: $[0,1] \subset [\frac{\mu+1}{2}, +\infty)$

η $f_\mu(x)$ είναι λοιπόν αύξουσα στο $[0,1]$ άρα το ελάχιστο είναι το $f_\mu(0) = \mu^2+1$. Αυτό είναι το $d^2(M,B)$.

Τελικά αν $\mu > 1$ δηλ. το M δεξιά του A, έχουμε $\frac{\mu+1}{2} > 1$ ή $[0,1] \subset (-\infty, \frac{\mu+1}{2}]$ η $f_\mu(x)$ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$ και το ελάχιστο είναι $f_\mu(1) = (\mu-1)^2 = d^2(A,M)$.

---

46. Εστω το τρισορθογώνιο σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και τα σημεία A, B και Γ τέτοια ώστε : $\vec{OA} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{OB} = 2\vec{OA}$ και $\vec{O\Gamma} = -3\vec{OA}$. Ποιο είναι το σύνολο (P) των σημείων M, για τα οποία τα γινόμενα $\vec{OM} \cdot \vec{BM}$ και $\vec{AM} \cdot \vec{\Gamma M}$ είναι ίσα; Να μελετήσετε τα κοινά σημεία του (P) και της σφαίρας (Γ) που έχει κέντρο το A, και περνάει απ' την αρχή O του συστήματος.

(B . S)

ΛΥΣΗ

Τα σημεία είναι: $A(1,-1,1)$ $B(2,-2,2)$ $\Gamma(-3,3,-3)$.

Αν το M έχει (x,y,z) τότε

$\vec{OM} \cdot \vec{BM} = x(x-2) + y(y+2) + z(z-2) = x^2+y^2+z^2 - 2(x-y+z)$ και

$\vec{AM}\cdot\vec{\Gamma M} = x^2+y^2+z^2+2(x-y+z)-9$.

Το σύνολο (P) λοιπόν δίνεται αναλυτικά απ την

$4(x-y+z)-9=0$ που είναι επίπεδο κάθετο στο $\vec{OA}$.

<u>Μελέτη της $(P)\cap(\Gamma)$.</u> Η ακτίνα της σφαίρας (Γ) είναι $|\vec{OA}|=\sqrt{3}$. Η απόσταση d του σημείου A απ το επίπεδο (P) είναι $d=\frac{1}{4\sqrt{3}}|4(1+1+1)-9|=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Επειδή $d<|\vec{OA}|$ η τομή που μελετούμε είναι κύκλος του (P) με ακτίνα $r=\sqrt{(\vec{OA})^2-d^2}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$ και κέντρου A', που είναι η προβολή του A πάνω στο (P).

Για τις συντεταγμένες του A': Αφού και το $\vec{OA}$ είναι κάθετο στο (P) τότε $\exists\lambda\in\mathbb{R}$: $\vec{OA'}=\lambda\vec{OA}$. Άρα οι συντεταγμένες του A' είναι της μορφής $(\lambda,-\lambda,\lambda)$ και επειδή αυτό ανήκει στο (P) έχουμε $12\lambda-9=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}$.

Το πρόβλημα μπορεί να προσαρμοστεί και στις 2 διαστάσεις.

---

47. Στο καρτεσιανό επίπεδο $(O,\vec{i},\vec{j})$ θεωρώ τις απεικονίσεις f_1 και f_2 του επιπέδου στον εαυτό του που συνδέουν το $M(\chi,\psi)$ με το $M(\chi',\psi')$ αντίστοιχα ως εξής:

f_1: $\chi'=\chi+\psi-1$, $\psi'=\chi-\psi+1$ f_2: $\chi'=\psi+2$, $\psi'=\chi+1$

1. Να οριστεί ομοίως η απεικόνιση $f_2\circ f_1$
2. Για το τυχόν M του επιπέδου, έχουμε απ'

τις f_1, f_2, και $f_2 o f_1$ ως εικόνες τα $M_1=f_1(M)$, $M_2=f_2(M)$ και $M_3=(f_2 o f_1)(M)$. Εστω η νέα απεικόνιση που συνδέει το σημείο μας Μ με το Κ, που ορίζεται απ' τη σχέση: $\vec{KM_1}+\vec{KM_2}-\vec{KM_3}=\vec{0}$.

Να δειχτεί ότι οι συντεταγμένες Χ , Ψ του σημείου Κ, δίνονται, συναρτήσει των συντεταγμένων του Μ, απ'τις σχέσεις:

$X=3\psi-2$ και $\Psi=\chi-2\psi+2$.

3. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία της f.

(Ε. Μ)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $M_1(X_1, Y_1)=f_1(M)$ όπου $X_1=x+y-1$, $Y_1=x-y+1$.
Ομοίως $M_2(X_2, Y_2)=f_2(M)$ με $X_2=y+2$, $Y_2=x+1$.
Άρα η $f_2 o f_1$ δίνει το $M_3(X_3, Y_3)$ που ορίζεται
$X_3=Y_1+2=x-y+3$, και $Y_3=X_1+1=x+y$.

2. Η ισοδύναμη ισότητα που ορίζει το Κ, γράφεται:
$(X_1+X_2-X_3)-X=0$ και $(Y_1+Y_2-Y_3)-Y=0$ άρα οι συντεταγμένες του Κ δίνονται:

$$X=X_1+X_2-X_3=3y-2$$
$$Y=Y_1+Y_2-Y_3=x-2y+2.$$

3. Το $K=f(M)$ ταυτίζεται με το Μ όταν $x=3y-2$ και $y=x-2y+2$ δηλ τα $(1,1)$, $(-2,0)$. –

48. Εστω τα σημεία $M_t(1+t\sigma\upsilon\nu\alpha,\ 0)$, $N_t(-1, t\eta\mu\alpha)$ του Καρτεσιανού επιπέδου, όπου $t\in R$(παράμετρος) και $\alpha\in(0,\ \pi/4)$.

Εστω το G_t το μέσο του τμήματος M_tN_t και (C_t) ο κύκλος διαμέτρου M_tN_t

1. Να δειχτεί ότι το σύνολο των G_t όταν το t διαγράφει το R, είναι μια ευθεία.

2. Να δειχτεί ότι υπάρχει στο επίπεδο ένα σημείο T, διαφορετικό απ΄το N_0, τέτοιο ώστε για κάθε $t\in R$ το T να ανήκει στον κύκλο (C_t) (να μη βρεθούν οι συντεταγμένες του)

3. Να δειχτεί ότι $\forall t\in R$ οι γωνίες των ζευγών των ευθειών $(TM_0,\ TM_t)$ και $(TN_0,\ TN_t)$ είναι ίσες.

(BACC. C.)

ΛΥΣΗ

1. Το G_t έχει συντεταγμένες το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των M_t, N_t δηλ. $G_t\left(\frac{t\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}, \frac{t\eta\mu\alpha}{2}\right)$. Αν τις ονομάσω $G_t(X, \Psi)$

από τις σχέσεις $X=\frac{t\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$ $Y=\frac{t\eta\mu\alpha}{2}$ αν απαλείψω το t, έχω $\frac{Y}{X}=\varepsilon\varphi\alpha$ ή $Y=\varepsilon\varphi\alpha X$ άρα τα διάφορα G_t

βρίσκονται σε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

2. Ο κύκλος (C_t) έχει κέντρο το G_t και ακτίνα το μισό της απόστασης M_tN_t δηλ. $\frac{\sqrt{(2+t\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(t\eta\mu\alpha)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+t^2+4t\sigma\upsilon\nu\alpha}}{2}$. Επομένως η εξίσωση του (C_t) είναι:

$\left(x-\frac{t\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t\,\eta\mu\alpha}{2}\right)^2=\frac{4+t^2+4\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot t}{4}$ ή μετά τις πράξεις

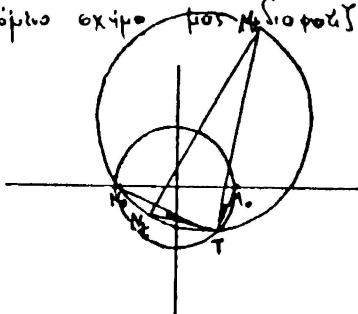
$$x^2+y^2-t\,\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot x-t\,\eta\mu\alpha\cdot y-(1+t\,\sigma\upsilon\nu\alpha)=0 \quad (1)$$

Για να βρούμε τα σταθερά του σημεία, γράφουμε την (1) στη μορφή: $x^2+y^2-1-t(x\,\sigma\upsilon\nu\alpha+y\,\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)=0$. Αυτή, για να ισχύει ανεξάρτητα του t, θα πρέπει

(α) $x^2+y^2=1$ } ή αναλυτικά θα βρω τα σημεία τομής
(ε)$^\wedge$ $x+y\,\varepsilon\varphi\alpha+1=0$ } του κύκλου (α) και της ευθείας (β).

Ένα απ' αυτά είναι το N_0. Όμως η ευθεία (β) και ο κύκλος (α) έχουν κι άλλο κοινό σημείο, αφού το $O(0,0)$ κέντρο του κύκλου, απέχει απ την ευθεία (β) απόσταση $d=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}=\sigma\upsilon\nu\alpha<1=\rho$. Αυτό το δεύτερο σημείο το ονομάζουμε T, και είναι σημείο του κύκλου διαμέτρου M_0N_0.

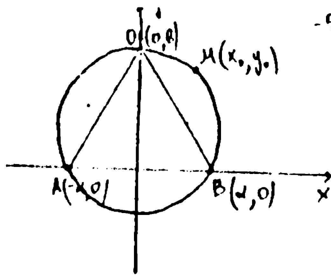
3. Το τρίτο ερώτημα λύνεται γεωμετρικά. Το επόμενο σχήμα ~~μας~~ διαφωτίζει. Ο μεγάλος κύκλος είναι κάποιος (C_t) που περνάει υποχρεωτικά απ' τό N_0 και T, που ανήκουν στην $x^2+y^2=1$. Οι σημειωμένες γωνίες είναι πράγματι ίσες, αφού η κάθε μια ισούται με τη διαφορά απ την ορθή της σταθερής $\widehat{N_0TM_t}$.



---

49. Εστω (C) ο κύκλος, ο περιγεγραμμένος σε ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ, με βάση ΑΒ. Να δειχτεί ότι για κάθε $M\in(C)$ ισχύει :

$$MA.MB=|OA^2-OM^2|.$$



Παίρνοντας κατάλληλα το σύστημα αναφοράς, έχω τις απλούστερες συντεταγμένες για τα σημεία A, B, O.

Η εξίσωση του κύκλου λοιπόν, δίνεται από την

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ b^2 & 0 & b & 1 \\ a^2 & -a & 0 & 1 \\ a^2 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ b^2 & 0 & b & 1 \\ a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ή τελικά, αναπτύσσοντας κατά την τελευταία γραμμή:

$$(C): \quad bx^2+by^2+(a^2-b^2)y-a^2b=0 \quad (1).$$

Αφ' ετέρου είναι $OA^2 = b^2+a^2$, $OM^2 = x_0^2+(y_0-b)^2$ όπου (x_0, y_0) σημείο της (1). Οπότε η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$\left|b^2+a^2-x_0^2-(y_0-b)^2\right| = \sqrt{\left[(x_0+a)^2+y_0^2\right]\left[(x_0-a)^2+y_0^2\right]} \quad (2)$$

Υψώνοντας τα δύο μέλη της (2) στο τετράγωνο και εκτελώντας τις πράξεις έχω: $bx_0^2+by_0^2+(a^2-b^2)y_0-a^2b=0$ που είναι αληθής αφού $M(x_0,y_0) \in (C)$.

---

50. Σε ορθοκανονικό σύστημα, δίνεται το σύνολο E των σημείων M(χ,ψ) ώστε:
$\chi^2+4\psi^2-2|\chi|-3=0$.
Να μελετηθεί και να κατασκευαστεί το σύνολο E.

(BACC. C AMIENS)

ΛΥΣΗ.

Η εξίσωση που περιγράφει το σύνολο E γράφεται:

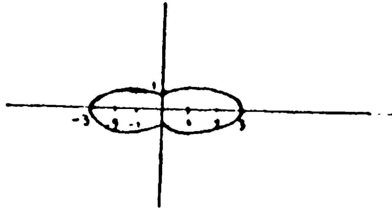
(1) $x^2+4y^2-2x-3=0$ αν $x\geq 0$

(2) $x^2+4y^2+2x-3=0$ αν $x<0$

Η (1) μετασχηματίζεται σε $x^2-2x+1+4y^2-4=0 \Leftrightarrow$ $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Παριστάνει έλλειψη με κέντρο το $(1,0)$

και μήκη αξόνων $2a=4$ $2b=2$ $\gamma=1$ και εστίες $(0,0)$ $(2,0)$. Μας ενδιαφέρει όμως το τμήματης δεξιά του Oy.

Ομοίως η (2) γράφεται: $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Είναι πάλι έλλειψη με κέντρο $(-1,0)$ $2a=4$ $2b=2$ της οποίας μας ενδιαφέρει το τμήμα γι $x<0$.



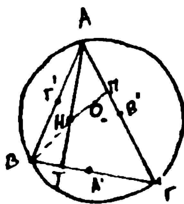
---

51. I **α.** Εστω A, B, Γ τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο. Εστω επίσης O, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ. Αν A', B' Γ' τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα να δειχτεί ότι το σημείο H που ορίζεται απ' την ισότητα (I) $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$, είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

β. Να δείξετε επίσης $\vec{AH}=2\vec{OA'}$

(BACC. C PARIS)

ΛΥΣΗ



α. Όταν διανύσματα είναι ίσα, έχουν ίσες προβολές. Άρα (Ισχύει το αντίστροφο;) έχουμε:

$(1) \Rightarrow \text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OH} = \text{προβ}_{ΒΓ}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OΓ}) \Rightarrow$

$\text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OH} = \text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OA} + (\text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OB} + \text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OΓ}) \Rightarrow$ ($\vec{0}$)

$\text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OH} = \text{προβ}_{ΒΓ}\vec{OA}$. Άρα τα σημεία Α και Η, βρίσκονται στην ίδια κάθετο προς τη ΒΓ, δηλ. το Η, βρίσκεται στο ύψος ΑΤ. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι το Η βρίσκεται και στο ύψος ΒΠ. Άρα το Η ορθόκεντρο.

β. Απ το σχήμα έχουμε $\vec{AH} = \vec{AO} + \vec{OH} \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$\vec{AH} = \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OΓ} = \vec{OB} + \vec{OΓ} = 2\vec{OA'}$.

---

52. Εστω $\lambda \in R$, και η $\psi^2+\lambda\chi^2+(\lambda+1)\chi-\lambda/4=0$ (I)

1. Να εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του λ το είδος της καμπύλης που παριστάνει η (I) σε ορθοκανονικό σύστημα.

2. Να δοθούν οι συντεταγμένες των κέντρων συμμετρίας των καμπύλων σε κάθε περίπτωση, καθώς και οι εξισώσεις των ασυμπτώτων τους.

(BACC D, E DAKAR)

ΛΥΣΗ

1. Στη περίπτωση που $\lambda=0$ η (1) γίνεται $y^2+x=0$

και παριστάνει παραβολή με κορυφή το O, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία το $E(-\frac{1}{4},0)$.

Για $\lambda \neq 0$ η (1) γράφεται:

$$y^2+\lambda\left[x^2+\frac{\lambda+1}{\lambda}x\right]-\frac{\lambda}{4}=0 \quad ή \quad y^2+\lambda\left[x+\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right]^2-\frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda}-\frac{\lambda}{4}=0$$

ή τελικά $$y^2+\lambda\left[x+\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right]^2-\frac{(\lambda+1)^2+\lambda^2}{4\lambda}=0$$

Ονομάζω O' το σημείο με $O'\left(-\frac{\lambda+1}{2\lambda},0\right)$ και $O'X$, $O'Y$ άξονες παράλληλους προς τους Ox, Oy. Σ' αυτό το νέο σύστημα η εξίσωση (1) γίνεται:

$$Y^2+\lambda X^2-\frac{2\lambda^2+2\lambda+1}{4\lambda}=0$$

<u>Αν υποθέσουμε $\lambda<0$</u> η (1) παριστάνει υπερβολή με κέντρο το O' και ασυμπτώτους τις $Y=\pm X\sqrt{-\lambda}$.
Οι κορυφές που βρίσκονται στον $X'O'X$ έχουν τετμημένες $\pm\frac{\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+1}}{2\lambda}$. Ως προς το αρχικό σύστημα, οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y=\pm\left(x+\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right)\sqrt{-\lambda}$.

<u>Αν τώρα $\lambda>0$</u> η (1) παριστάνει έλλειψη με κέντρο O'. Οι κορυφές της πάνω στον $X'OX$ έχουν τετμημένες $\pm\frac{\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+1}}{2\lambda}$ και πάνω στον $Y'O'Y$ $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda}}$. Αν λοιπόν $\frac{1}{\lambda}>\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ή $\lambda<1$ ο άξονας $X'OX$ είναι ο εστιακός άξονας της έλλειψης. Αν όμως $\lambda>1$ αντίστροφα. Τελικά για $\lambda=1$ η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το O', και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

53. Εστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Θεωρώ το Ο, μέσον του ΒΓ, G το κέντρο βάρους του τριγώνου και Ο' το συμμετρικό του G ως προς Ο.

1. Να προσδιοριστεί το σύνολο Ε των σημείων Μ, που πληρούν την $|-3\vec{MG}-2\vec{MO}|=|\vec{MO'}|$

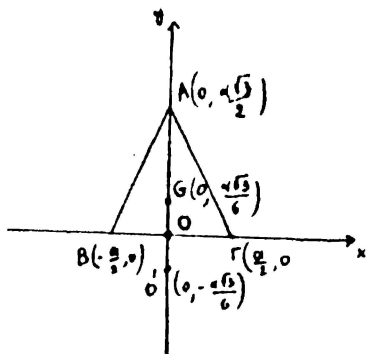
2. Να προσδιοριστεί το σύνολο L των σημείων Μ που πληρούν την $MB^2+M\Gamma^2-2MA^2=\kappa$ ($\kappa\in\mathbb{R}$).

Πως πρέπει να διαλέξουμε το κ, ώστε το σύνολο L να περιέχει το σημείο G;

3. Να δειχτεί ότι για οποιοδήποτε Μ του επιπέδου ισχύει: $MA^2-MB^2+M\Gamma^2=3MG^2-\alpha^2$.

Να προσδιοριστεί το σύνολο Γ, των σημείων του Μ, ώστε: $MA^2-MB^2-M\Gamma^2=2\alpha^2$

(BACC. SERIE C, 1983)



ΛΥΣΗ

1. Εστω $M(x_M,y_M)$ σημείο του συνόλου Ε. Τότε:

$-3\vec{MG}+2\vec{MO}=-3\left(-x_M,\ \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}-y_M\right)+2(-x_M,-y_M)=\left(3x_M,\ -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}+3y_M\right)+(-2x_M,-2y_M)$
$=\left(x_M,\ y_M-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$. Ομοίως $\vec{MO'}=\left(-x_M,\ -\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}-y_M\right)$. Άρα η δοθείσα σχέση γράφεται

$$x_M^2+\left(y_M-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2=(x_M)^2+\left(-\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}-y_M\right)^2 \Leftrightarrow y_M=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

Δηλ. το σύνολο Ε, είναι ευθεία από το G, $//xx'$.

2. Η σχέση γίνεται: (Αν $M(x_M,y_M)$ σημείο του L)

$$\left(-\frac{\alpha}{2}-x_M\right)^2+y_M^2+\left(\frac{\alpha}{2}-x_M\right)^2+y_M^2-2\left[x_M^2+\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}-y_M\right)^2\right]=\kappa \Leftrightarrow$$

$y_M = \frac{k+\alpha^2}{2\alpha\sqrt{3}}$ (το L, είναι ευθεία // xx').

Αν θέλουμε να περιέχει το G, πρέπει

$\frac{k+\alpha^2}{2\alpha\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \iff k=0.$

3. Θα δειχτεί, ότι η σχέση πληρείται για κάθε M, δηλ. η σχέση

$$x_M^2+\left(y_M-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x_M+\frac{\alpha}{2}\right)^2+y_M^2+\left(x_M-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y_M^2=3\left[x_M^2+\left(y_M-\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]+\alpha^2$$

είναι ταυτότης ως προς x_M, y_M. Πράγματι εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει 0=0 οεδ.

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2=2\alpha^2 \iff$$

$$x_M^2+\left(y_M-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x_M-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y_M^2+\left(x_M+\frac{\alpha}{2}\right)^2+y_M^2=2\alpha^2 \iff$$

$$3x_M^2+3y_M^2+\frac{3\alpha^2}{4}-\alpha\sqrt{3}\,y_M+\frac{\alpha^2}{2}=2\alpha^2 \iff$$

$$\iff x^2+y^2-\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}y-\frac{\alpha^2}{4}=0$$ (κύκλος, γνωστών στοιχείων).

---

54. Έστω το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=α).

1. Να προσδιοριστεί το σύνολο E_1 των σημείων Μ του επιπέδου, που πληρούν τη σχέση

$$4MA^2-MB^2-M\Gamma^2=2\alpha^2.$$

2. α. Έστω $\vec{f}$ η συνάρτηση που αντιστοιχεί: κάθε σημείο του επιπέδου σε διάνυσμα, με τύπο

$\vec{f}: M \to 2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{M\Gamma}$

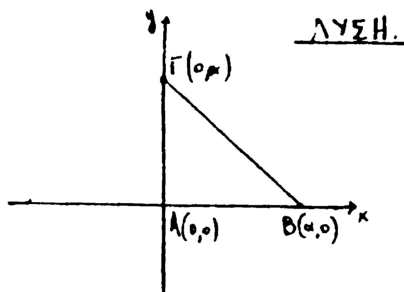
Να δειχτεί ότι η $\vec{f}$ είναι σταθερή συνάρτηση και να προσδιοριστεί η τιμή της.

β. Να καθοριστεί το σύνολο E_2 των σημείων Μ του επιπέδου, που πληρούν την

$$2MA^2 - MB^2 - M\Gamma^2 = -2\alpha^2$$

(BACC. LILLE SERIE C, 1983)

ΛΥΣΗ.



1. Η $4MA^2 - MB^2 - M\Gamma^2 = 2\alpha^2$ γίνεται:

$$4\left[x_M^2 + y_M^2\right] = (\alpha - x_M)^2 + y_M^2 + x_M^2 + (\alpha - y_M)^2 + 2\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + \alpha x_M + \alpha y_M - 2\alpha^2 = 0$$

(κύκλος γνωστών στοιχείων)

2. α. Είναι $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{M\Gamma} = 2(-x_M, -y_M) - (\alpha - x_M, -y_M) - (-x_M, \alpha - y_M) = \ldots = (-\alpha, -\alpha) =$ σταθερό. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή, με εικόνα το διάνυσμα $(-\alpha, -\alpha)$.

β. Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$2x_M^2 + 2y_M^2 = \alpha^2 + x_M^2 - 2\alpha x_M + y_M^2 + x_M^2 + \alpha^2 + y^2 - 2\alpha y_M - 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$x + y = 0 \quad (\text{ευθεία} \parallel B\Gamma).$$

---

55. Θεωρούμε στο επίπεδο, σταθερό σημείο Β και ένα άλλο Γ, που διαγράφει δοθείσα ευθεία σταθερής διεύθυνσης, που διέρχεται απ το Β

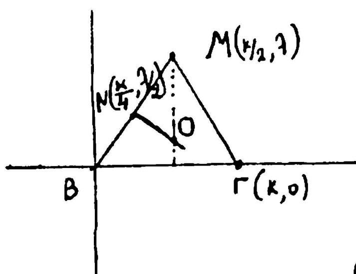
(ẋBx). Κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο με βάση ΒΓ και κορυφή Μ.

Να καθοριστεί το σύνολο των σημείων Μ, αν είναι γνωστό, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΒΜΓ, έχει σταθερή ακτίνα R.

(SÉRIE E, 1983)

ΛΥΣΗ

Είναι κατ' εξοχήν πρόβλημα Αναλυτικής Γεωμετρίας.



Με κατάλληλο σύστημα αναφοράς θα προσδιορίσω τις συντεταγμένες του περίκεντρου. Είναι $\lambda_{BM} = \frac{\lambda}{\kappa/2} = \frac{2\lambda}{\kappa}$ άρα

$\lambda_{NO} = -\frac{\kappa}{2\lambda}$ (ΝΟ μεσοκάθετος).

Άρα η εξίσωση της ΝΟ: $y - \frac{\lambda}{2} = -\frac{\kappa}{2\lambda}\left(x - \frac{\kappa}{4}\right)$ (1) Το Ο, προκύπτει απ τη λύση του συστήματος της (1) και της $x = \frac{\kappa}{2}$ που είναι

$x = \frac{\kappa}{2}$, $y = \frac{4\lambda^2 - \kappa^2}{8\lambda}$. Επειδή δε $BO = R =$ σταθερό

έχω $\frac{\kappa^2}{4} + \left(\frac{4\lambda^2 - \kappa^2}{8\lambda}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow (4\lambda^2 + \kappa^2)^2 = 64\lambda^2 R^2 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2 + \kappa^2 = \pm 8\lambda R \Leftrightarrow 4\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 + 4\lambda^2 = \pm 8\lambda R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 \pm 8Ry = 0$. Δηλ. Ο γεωμ. τόπος είναι 2 κύκλοι συμμετρικοί ως προς xx', που δίνουν 4 σημεία για το Μ, σε κάθε θέση του Γ.

56 Σε δοσμένο σύστημα αναφοράς, στο επίπεδο P, ονομάζουμε μοναδιαίο δίσκο το σύνολο $D=\{M\in P / OM\leq 1\}$
Ονομάζουμε απόσταση του σημείου M, απ το δισκο D, $\delta(M,D)$ τη μικρότερη των αποστάσεων του M, απ τα σημεία του D.

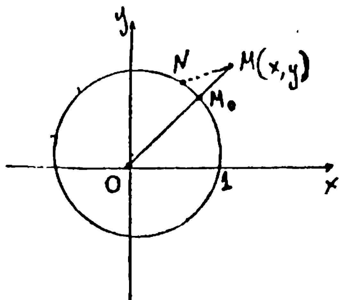
1. Να δειχτεί ότι αν το M είναι εξωτερικό του δίσκου, τότε $\delta(M,D)=MM_0$ όπου M_0 είναι η τομή του κύκλου $(O,1)$ και του τμήματος OM.

2. Αν (χ,ψ) οι συντεταγμένες του M τότε
$\delta(M,D)=\sqrt{\chi^2+\psi^2}-1$.

3. Έστω Δ η ευθεία $\psi=-2$. Να καθοριστεί το σύνολο των σημείων M του επιπέδου ώστε $\delta(M,D)=2\delta(M,\Delta)$.

(BACC. C BESANÇON 1984)

ΛΥΣΗ



1. Είναι $MM_0 < MN$ (γνωστή γεωμετρική πρόταση).

2. $\delta(M,D)=MO-OM_0=\sqrt{x^2+y^2}-1$ (αδ).

3. Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$\sqrt{x^2+y^2}-1=2\left|-2-y\right| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-1=2(-2-y) \quad \text{αν } y<-2 \quad (1)$$

ή

$$\sqrt{x^2+y^2}-1=2(2+y) \quad \text{αν } y>-2 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) γίνονται:

$$\sqrt{x^2+y^2}=-3-2y \quad \text{αν } y<-2$$

ή

$$\sqrt{x^2+y^2}=5+2y \quad \text{αν } y>-2$$

ή $x^2-3y^2-12y-9=0$ για $y<-2$

και $x^2-3y^2-20y-25=0$ για $y>-2$.

δηλαδή τα σύνολα των σημείων είναι δύο υπερβολές, τα τμήματά τους, κάτω και πάνω απ την ευθεία $y=-2$ αντίστοιχα,

$$\frac{x^2}{3}-\frac{(y+2)^2}{1}=-1 \quad \text{για } y<-2$$

και $$\frac{x^2}{100/12}-\frac{(y+20/6)^2}{100/36}=-1 \quad \text{για } y>-2.$$

---

57. Εστω ορθοκανονικό σύστημα $(O,\vec{i},\vec{j})$ και E_κ το σύνολο των σημείων M του επιπέδου P με συντεταγμένες (χ,ψ) ως προς το $(O,\vec{i},\vec{j})$ που πληρούν την

$$2\chi\psi-\chi+2\kappa\psi+2\kappa(\kappa-1)=0 \quad (\kappa\in R)$$

Θέτουμε $\vec{u}=\sqrt{2}/2(\vec{i}+\vec{j})$ και $\vec{v}=\sqrt{2}/2(-\vec{i}+\vec{j})$ και ονομάζουμε (X,Ψ) τις συντεταγμένες του M ως πρός το σύστημα $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. Να δειχτεί ότι η εξίσωση του E_κ γράφεται στο $(O,\vec{u},\vec{v})$:

$$\left[X+\frac{\sqrt{2}}{4}(2\kappa-1)\right]^2-\left[\Psi-\sqrt{2}/4(2\kappa+1)\right]^2=\kappa(1-2\kappa)$$

2. Να δειχτεί ότι υπάρχουν δύο τιμές του κ, για τις οποίες το E_κ είναι η ένωση δύο ευθειών, των οποίων να δοθούν οι εξισώσεις ως προς το $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3. Στη περίπτωση που το E_κ είναι υπερβολή και πάντα στο σύστημα $(O,\vec{u},\vec{v})$, να δοθούν :

α. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της

β. το σύνολο που διαγράφουν τα κέντρα ω_κ του E_κ όταν το κ μεταβάλλεται.

(BACC/ MAROCAIN 1984)

ΛΥΣΗ.

1. Στό πρόβλημα αυτό, φαίνεται ο ρόλος της αλλαγής συστήματος αξόνων.

Θα βρώ τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός διανύσματος, στο δύο συστήματα:

Για το τυχόν $M(x,y)$ έχω

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + \Psi\vec{v} = X\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) + \Psi\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j}) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(X-\Psi)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X+\Psi)\vec{j}$ άρα

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-\Psi) \quad \text{και} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+\Psi)$$

Επομένως η εξίσωση των σημείων του E_κ γράφεται:

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}(X-\Psi)\frac{\sqrt{2}}{2}(X+\Psi) - \frac{\sqrt{2}}{2}(X-\Psi) + 2\kappa\frac{\sqrt{2}}{2}(X+\Psi) + 2\kappa(\kappa-1) = 0$$

ή $X^2 - \Psi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(X-\Psi) + \kappa\sqrt{2}(X+\Psi) + 2\kappa(\kappa-1) = 0$ ή

$\left(X^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X + \kappa\sqrt{2}X\right) - \left(\Psi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Psi - \kappa\sqrt{2}\Psi\right) + 2\kappa(\kappa-1) = 0$ ή

$$\left[X^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(2\kappa-1)X\right] - \left[\Psi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+2\kappa)\Psi\right] + 2\kappa(\kappa-1) = 0$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις παραστάσεις $\frac{1}{8}(2\kappa-1)^2$ και $\frac{1}{8}(2\kappa+1)^2$ οι παραστάσεις στις αγκύλες γίνονται τέλεια τετράγωνα κι έχω:

$$\left[X + \frac{\sqrt{2}}{4}(2\kappa-1)\right]^2 - \left[\Psi - \frac{\sqrt{2}}{4}(2\kappa+1)\right]^2 = \kappa(1-2\kappa). \quad (1)$$

2. Για $\kappa=0$ η (1) γίνεται

$\left(X+\Psi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(X-\Psi) = 0$ (δύο ευθείες στο $(O,\vec{u},\vec{v})$)

και για $\kappa=\frac{1}{2}$ $(1) \Rightarrow \left(X+\Psi-\frac{1}{2}\right)\left(X-\Psi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ (ομοίως).

3 α. Απλό. Η υπερβολή είναι ισοσκελής ($\alpha^2=\beta^2=\kappa(1-2\kappa)$ κ.λ.π.

β. Το κέντρο της υπερβολής μας είναι το

$(x_0, \psi_0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}(2k-1), \frac{\sqrt{2}}{4}(2k+1)\right)$. Έχουμε δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4x_0}{\sqrt{2}} = -2k+1 \\ \frac{4\psi_0}{\sqrt{2}} = 2k+1 \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} x_0+\psi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

δηλ. το κέντρο βρίσκεται στην ευθεία (2).

Έτσι τελικά ενώ στο σύστημα $(O,\vec{i},\vec{j})$ η εξίσωση του E_k δεν μας έλεγε τίποτα, στο νέο σύστημα $(O,\vec{u},\vec{v})$ ήταν μια υπερβολή που μελετήθηκε.

---

58. Θεωρούμε τις καμπύλες C και C′ που δίνονται αντίστοιχα απ τις :

C: $6\chi^2-9\psi^2-64\chi-54\psi-6=0$

C′: $4\chi^2+49\psi^2-6\chi+294\psi+26=0$

1. Να προσδιοριστεί το είδος των καμπύλων και να δειχτεί ότι έχουν το ίδιο κέντρο.

2 Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά τους στοιχεία, (εστίες, ασύμπτωτες κλπ)

3. Να χαραχτούν οι C και C′

(BACC. GUYANE 1984)

ΛΥΣΗ

1) Με τις γνωστές διαδικασίες έχω:

$(C): \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

$(C'): \frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$

Πράγματι η (C) υπερβολή και η (C′) έλλειψη, έχουν το ίδιο κέντρο (2,-3).

2) Απλό.

3) Απλό.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜ.

59. Δίνονται στο επίπεδο δύο σημεία, τα Α και Β. Εστω Μ, τρίτο σημείο, διάφορο του Α, και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΡΜQ, με διαγώνιο την ΑΜ, έτσι ώστε $(\vec{AP}, \vec{AQ}) = \pi/2$.

Να καθοριστεί το σύνολο των σημείων Μ, των σημείων Ρ και των σημείων Q έτσι ώστε :

$$BP^2+BQ^2=2AM^2$$

(BACC. SERIE C 1983)

---

60. Εστω Α, το σημείο με συντεταγμένες (1,0) και ονομάζουμε ΑΒΓ, το ισόπλευρο τρίγωνο που είναι εγγεγραμένο, μέσα στο κύκλο, με κέντρο Ο, και ακτίνα 1. Οι παράλληλες απ'το Ο, στις ευθείες ΑΒ και ΑΓ, τέμνουν την ΒΓ, στα Β'και Γ'.

Ονομάζουμε Δ, το σύνολο των ευθειών (D), που περνούν απ'το Ο, και τέμνουν την ευθεία ΒΓ σε σημείο διακεκριμένο των Β', Γ', που βρίσκεται μεταξύ των Β' Γ'(εσωτερικό σημείο)

1. Να γράψετε μια εξίσωση των ευθειών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

2. Να δείξετε ότι μια ευθεία (D), ανήκει στο Δ, αν και μόνο αν, περιγράφεται από εξίσωση της μορφής $\psi=\alpha\chi$, όπου $\alpha\in(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$.

3. Να δείξετε, ότι κάθε ευθεία $(D)\in\Delta$, τέμνει και τις τρείς ευθείες ΑΒ, ΑΓ, και ΒΓ στα σημεία Ρ, Q, R.

(BACC. SERIE E 1983)

---

61. Εστω Ο, Α και Β, τρία σημεία ενός επιπέδου. Ενας κύκλος (C) περνάει απ'τα Ο και Α. Ενας άλλος (C') απ'τα Ο και Β. Οι δύο αυτοί κύκλοι μεταβάλλονται, έτσι ώστε οι εφαπτόμενες τους στο Ο, παραμένουν ορθογώνιες (κάθετες). Εστω Μ το δεύτερο κοινό σημείο των δύο κύκλων. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος των σημείων Μ.

(BACC. SERIE C 1983)

---

62. Εστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στο εξωτερικό του κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα, Α'ΒΓ, ΑΒ'Γ και ΑΒΓ'.

1. Να συγκριθούν τα τρία διανύσματα $\vec{AA'}$ $\vec{BB'}$ $\vec{\Gamma\Gamma'}$ στο μέτρο και στη διεύθυνση.

2. Εστω Ι, το σημείο τομής των ΓΓ' και ΒΒ'. Να δειχτεί ότι το Ι είναι κοινό σημείο των κύκλων (ΑΒΓ'), (ΑΒ'Γ) και (Α'ΒΓ). Να συμπεράνετε, ότι οι ευθείες ΑΑ' ΒΒ' και ΓΓ' συγκλίνουν στο Ι.

3. Υποθέτουμε, ότι το Ι, είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Παίρνουμε ένα σημείο D, πάνω στο τμήμα ΙΒ, και έξω απ'αυτό (εξωτερικό σημείο) έτσι ώστε DΒ=ΙΓ. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου Α'ΙD και να δειχτεί , ότι ΑΑ'=ΙΑ+ΙΒ+ΙΓ.

(BACC. SERIE E 1984)

---

63 Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB, μήκους α. Ενα σημείο M, μετακινείται, πάνω σ'αυτό το τμήμα. Να κατασκευαστούν, απ'την ίδια πλευρά του AB, τα ισόπλευρα τρίγωνα PAM και QMB, και έστω Γ, το σημείο τομής των ευθειών AP και BQ.

I. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος του μέσου O του PQ.

2. Να δειχτεί, ότι η μεσοκάθετη του PQ, περνάει απ'το κέντρο G, του περιγεγραμμένου κύκλου, στο τρίγωνο ABΓ.

3. Να δειχτεί ότι, το σημείο G, είναι το κέντρο των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα PMQ.

4. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος του κέντρου του περιγ. κύκλου στο τρίγωνο ΓPQ.

5. Κατασκευάστε το PQ.

(EACC. E, 1983)

---

64 Εστω ισοσκελές τρίγωνο OAB (OA=OA). Εστω OH το ύψος. Εστω επίσης (O) το σύνολο των κύκλων με κέντρο το O, και ΑΓ και ΒΔ (Γ,Δ∈O) οι εφαπτόμενες απ'τα A και B στους τυχόντα κύκλο που δεν είναι όμως συμμετρικές ως προς το ύψος OH.

I Να βρεθούν οι γεωμ. τόποι των Γ και Δ, καθώς και του σημείου τομής M των ΑΓ και ΒΔ.

2. Να δειχτεί ότι η ευθεία ΓΔ περνάει απ' το σημείο H.

3. Να δειχτεί ότι, οι διχοτόμοι της γωνίας $\widehat{AMB}$, περνούν από σταθερά σημεία.

(EACC. E 1983)

65 Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi)=\chi-\sqrt{|\chi|}$ $\forall \chi \in R$.

1. Να μελετηθεί και να χαραχτεί η καμπύλη της C, σε ορθοκανονικό σύστημα. Εστω C το τμήμα της C_1 με αρνητικές τετμημένες και C_2 το αντίστοιχο, με θετικές.

2. Εστω α, πραγματικός και θετικός αριθμός και θεωρούμε τα σημεία Μ και Ρ της C_2 με τετμημένες αντίστοιχα $(\alpha-1)^2$ και $(\alpha+1)^2$. Εστω επίσης Κ το μέσο του τμήματος ΜΡ.

α. Να καθοριστούν οι συντεταγμένες του Κ όταν το $\alpha\in(0,1)$ και να χαραχτεί το σύνολο των σημείων Κ.

β. Ομοίως όταν $\alpha>1$

3. Εστω D_λ η ευθεία με εξίσωση $\psi=\chi-\lambda$ με $\lambda>0$. Ονομάζουμε Μ και M_2 τα σημεία τομής της D_λ με τις C_1 και C_2 αντίστοιχα.

α. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων που διαγράφει το μέσο Ι του M_1M_2, όταν το λ, μεταβάλλεται.

β. να υπολογιστεί το μήκος του M_1M_2

γ. Εστω $A(3/2,\ 3/2)$. Θεωρούμε ένα νέο σύστημα αξόνων ορθοκανονικό (Α, Ι, J), έτσι ώστε $(\widehat{\vec{i},\vec{I}})=\pi/4$. Εστω M_1' σημείο της ευθείας M_1M_2, που ανήκει στον άξονα ΑΙ του νέου συστήματος και M_2' τέτοιο ώστε $\overrightarrow{M_1'M_2'}=\overrightarrow{M_1M_2}$. Να εκφράστε συναρτήσει του λ, τις συντεταγμένες X_2 και Ψ_2 του M_2', στο σύστημα $(A,\ \vec{I},\ \vec{J})$. Να βρεθεί ο τόπος που διαγράφει το M_2' όταν το λ μεταβάλλεται. Να γίνει η γραφική του παράσταση.

(BACC C. DAKAR 1984)

66. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ=3α) και ΒΓ=2α

1. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, έτσι ώστε: $2MA^2 + 3MB^2 + 3M\Gamma^2 = 8\alpha^2$
2. Όμοίως το σύνολο Ε των σημείων Μ ώστε
   $$2MA^2 + 3MB^2 + 3M\Gamma^2 = 22\alpha^2$$
3. Να δειχτεί ότι οι ευθείες ΒΓ, ΑΒ, και ΑΓ έχουν κάθε μια ένα μοναδικό κοινό σημείο με το σύνολο Ε.

(BACC. C GUYANE 1984)

----

67. Σε τρισορθογώνιο σύστημα δίνονται τα σημεία Α(3,2,3) Β(9,2,11) Γ(6,-3,7).

1. Να δείξτε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι ορθογώνια.
2. Να δοθεί μια εξίσωση του επιπέδου Ρ που ορίζουν τα σημεία Α, Β και Γ.
3. Να δοθεί η εξίσωση της σφαίρας S, διαμέτρου ΑΒ καθώς και οι συντεταγμένες του κέντρου της.

(BACC. C ANTILLES 1984)

----

68. Εστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο και θεωρούμε την απεικόνιση Φ, ώστε σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου συνδέουμε τον πραγματικό αριθμό

$$\Phi(M)=MA^2 + 2MB^2 - M\Gamma^2.$$

Θέτουμε $|\overrightarrow{AB}|=\alpha$ με $\alpha>0$

1. Εστω το σημείο G που ορίζεται: $\overrightarrow{GB}= /2\overrightarrow{A\Gamma}$ Να υπολογιστεί το GA^2, GB^2 και $G\Gamma^2$ συναρτήσει του α.

2. Να καθοριστεί το σύνολο Γ των σημείων Μ που πληρούν την $\varphi(M)=\alpha^2$

(BACC. E ROUEN)

---

69. Εστω κινητό σημείο Μ στο επίπεδο, του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται συναρτήσει του χρόνου απ' τις εξισώσεις: $\chi=2/\sigma\upsilon\nu t$ $\psi=\sqrt{5}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t}$ με $t\epsilon(0,\pi)$

1. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες της ταχύτητας στη χρονική στιγμή t. Να δειχτεί ότι η τροχιά του κινητού, Τ, είναι τμήμα μιας υπερβολής (Η) με εξίσωση $5\chi^2-4\psi^2=20$. Να κατασκευαστεί η (Η) και να καθοριστεί το Τ (τροχιά)

2. Να καθορίστε τα τμήματα της Τ, όπου η κίνηση επιταχύνεται ή επιβραδύνεται.

3. Να ορίσετε τις κορυφές, τις εστίες και τις διευθετούσες της υπερβολής (Η).

4. Να δειχτεί ότι η τεταγμένη του Μ, παίρνει κατά τη διάρκεια της κίνησης, μία και μοναδική φορά την τιμή $4\sqrt{5}/3$.

Ποιά είναι τότε η τετμημένη του Μ;

Για αυτή τη θέση του Μ, υπολογίσατε την απόσταση του απ' την εστία της (Η) με θετική τετμημένη.

(BACC E LILLE)

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

70.A Δίνεται η συνάρτηση : $f_\mu(\chi)=LN\ (\chi+\sqrt{\chi^2+\mu}\ )$ $(\mu\epsilon R)$ και συμβολίζουμε με D_μ το πεδίο ορισμού της , καθώς και I_μ το πεδίο τιμών της και C_μ την καμπύλη της.

1. Να καθοριστούν τα σύνολα D_μ για τα διάφορα μ.
2. Να μελετηθούν οι μεταβολές των f_μ στα D_μ.
3. Να χαραχτούν οι καμπύλες C_{-1}, C_0, C_1.
4. Να προσδιοριστούν τα σύνολα $I_\mu=f_\mu(D_\mu)$. Να δειχτεί ότι οι f_μ είναι 1-1 για κάθε μ.

B. Θεωρούμε απ τις $f_\mu(\chi)$ τις f_1 και f_{-1}

1α. Να δειχτεί ότι $\forall\chi\epsilon R$ $1/2[e^{f_1}-e^{-f_1}]=\chi$

β. $\forall\chi\epsilon[1,\infty)$, $1/2[e^{f_{-1}}+e^{-f_{-1}}]=\chi$

γ. Να οριστούν οι αντίστροφες συναρτήσεις φ_1 και φ_{-1} των f_1 και f_{-1}

2. Θεωρούμε την $\varphi(\chi)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ Να δειχτεί ότι $\forall\chi\epsilon R_+$ $\varphi(X)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_{-1}(x)}$ και ότι $\varphi(\chi)^2<1$

3. Να δειχτεί ότο η $\varphi(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη και ότι $\varphi'(\chi)=1-\varphi^2(\chi)$.

4. να μελετηθούν οι μεταβολές της φ, και να δειχτεί ότι υπάρχει η αντίστροφή της · με πεδίο ορισμού το (-1,1)

Να επαληθέψτε (αν ονομάσουμε τ(χ) την αντίστροφη της φ(χ)) ότι τ(0)=0 και επίσης:

$$\tau'(\chi)=\frac{1}{1-\chi^2}$$

(EACC. E 1983)

ΛΥΣΗ.

1. Θα πρέπει $\forall \mu \in N$ $\left.\begin{matrix} x^2+\mu \geq 0 \\ \text{και } x+\sqrt{x^2+\mu} > 0 \end{matrix}\right\}(1)$

Όταν $\mu>0$ οι (1) πληρούνται $\forall x\in R$. δηλ. $D_\mu = R$

Όταν $\mu=0$ η (1)β γίνεται $x+\sqrt{x^2} = x+|x|$. Για να είναι $x+|x|>0$, πρέπει $x>0$ δηλ. $D_\mu = R_+^*$.

Όταν είναι $\mu<0$, η (1)α, ισχύει στα διαστήματα $-(\infty, -\sqrt{|\mu|}] \cup (\sqrt{|\mu|}, +\infty)$ (απ τη λύση της ανίσωσης), ενώ η (1)β, μόνη στο $(\sqrt{|\mu|}, \infty)$, το οποίο είναι το D_μ.

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$D_\mu = \begin{cases} R & \text{όταν } \mu>0 \\ R_+^* & \text{όταν } \mu=0 \\ (\sqrt{|\mu|}, \infty) & \text{όταν } \mu<0 \end{cases}$$

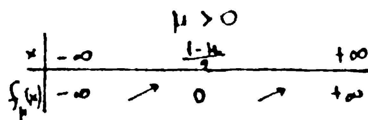
2. Μεταβολές της $f_\mu(x)$

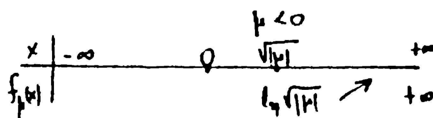
$\lim\limits_{+\infty} f_\mu(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{-\infty} f_\mu(x) = \lim\limits_{-\infty} \ln \dfrac{x^2-x^2-\mu}{x-\sqrt{x^2+\mu}} = \lim\limits_{-\infty} \ln\left(\dfrac{-\mu}{x-\sqrt{x^2+\mu}}\right)$.

Το όριο αυτό όταν $\mu>0$ είναι το $-\infty$, ενώ όταν $\mu<0$ δεν ορίζεται η $f_\mu(x)$ στο R_-.

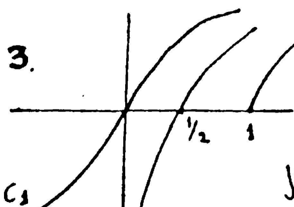
Είναι $f'_\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+\mu}} > 0$ $\forall x\in R$, άρα η $f_\mu(x)$ ↗ $\forall \mu \in R$.

Οι πίνακες μεταβολών είναι





3.



Είναι $f''_\mu(x) = \dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ άρα τα κοίλα "κάτω" στο $(0, \infty)$.

Η C_{-1} είναι η καμπύλη της [illegible] $(x+\sqrt{x^2-1})$

4. Αν $\mu>0 \Rightarrow I_\mu = R$

Αν $\mu=0 \Rightarrow I_\mu = R$

Αν $\mu<0 \Rightarrow I_\mu = [0,\infty)$. Ενδεικτικά των πεδίων τιμών είναι οι καμπύλες C_1, C_0, C_{-1}. Επειδή $f_\mu \nearrow$ προκύπτει ότι η f_μ είναι 1-1 $\forall \mu \in R$.

B. 1 α. $\frac{1}{2}\left[x+\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right] = x$

β. $\frac{1}{2}\left[x+\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right] = x$

$$y=f_1(x) \Leftrightarrow y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow e^y = x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+1} = e^x \Leftrightarrow$$
$$y^2+1 = e^{2x}+y^2-2e^x y \Leftrightarrow \phi_1 = f_1^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

Ομοίως $\phi_{-1} = f_{-1}^{-1}(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$

2. $$\phi(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_{-1}(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$\phi^2(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{e^{2x}+e^{-2x}+2} < 1 \quad (\text{φανερό}).$$

3. $$\phi'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = 1-\phi^2(x).$$ Άρα η παράγωγος της $\phi(x)$ ορίζεται σ' όλο το R.

4. Επειδή $\phi^2(x)<1 \Rightarrow \phi'(x)>0 \Rightarrow$ η $\phi(x) \nearrow$ στο R.

Είναι $\lim\limits_{\infty} \phi(x) = \lim\limits_{\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = 1.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$ (ομοίως). Άρα πεδίο τιμών το $(-1,1)$ και η $\varphi(x)$ σαν αύξουσα, είναι 1-1. Άρα υπάρχει η $\varphi^{-1}(x) = T(x) : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Αυτή βρίσκεται με τη γνωστή διαδικασία:

$$\varphi(x) = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$ Δηλ. $\varphi^{-1}(x) = T(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Είναι $$T'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

(Είναι $\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{1-x}{1+x}$ αφού $-1 < x < 1$).

---

71. Θεωρούμε την $f(x)=4^x-2^{x+1}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της.

2. Να παρασταθεί γραφικά. Απ τη γραφική της παράσταση να εξαχθεί συμπέρασμα για το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης

$f(x)=\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

3. Να βρεθούν υπολογιστικά οι ρίζες αυτές.

(BACC. C. 1983)

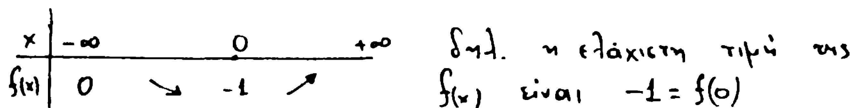
ΛΥΣΗ

1. $f'(x) = e^{x\ln 4} \cdot \ln 4 - e^{(x+1)\ln 2} \cdot \ln 2 = e^{\ln 4^x} \cdot \ln 2^2 - e^{\ln 2^{x+1}} \cdot \ln 2 =$
$= \ln 2 \cdot 2^{x+1} \cdot (2^x - 1)$. Άρα για $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ η $f(x) \nearrow$.

και για $x<0$ η $f(x)\searrow$.

$$\lim_{\infty}(4^x-2^{x+1}) = \lim_{\infty} 2^x(2^x-2) = +\infty$$

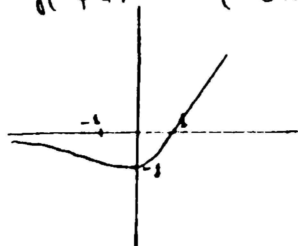
$$\lim_{-\infty}(4^x-2^{x+1}) = \lim_{\infty}\frac{1}{2^x}\left(\frac{1}{2^x}-2\right)=0$$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

δηλ. η ελάχιστη τιμή της $f(x)$ είναι $-1=f(0)$

2. Η $f''(x)=2^{x+1}(2^{x+1}-1)$ δηλ. μηδενίζεται για $x=-1$ που είναι σημείο καμπής. Ασύμπτωτος η $y=0$. Η γραφική παράσταση είναι:



Απ' τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η $f(x)=\alpha$ (που οι λύσεις της γραφικά σημαίνουν τα σημεία τομής της καμπύλης μας και της $y=\alpha$), παρουσιάζει την εξής κατανομή ριζών:

Για $\alpha<-1$ δεν έχει λύση (0 κοινά σημεία), για $-1<\alpha<0$ έχουμε δύο λύσεις, ετερόσημες και για $\alpha>0$, μια λύση θετική.

3. Θα δείξουμε αλγεβρικά τα παραπάνω πορίσματα, για τις διάφορες τιμές του α.

$f(x)=\alpha \Leftrightarrow 2^{2x}-2\cdot 2^x-\alpha=0$ Θέτω $2^x=\omega \Rightarrow$

$\omega^2-2\omega-\alpha=0 \Rightarrow \omega_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\alpha}$. Άρα για $\alpha<-1$, δεν έχω λύσεις, στη συνέχεια έχω (αν $\alpha+1>0$)

$2^x=1+\sqrt{1+\alpha} \Leftrightarrow x=\ln(1+\sqrt{1+\alpha})$ που ορίζεται πάντα

και $2^x=1-\sqrt{1+\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{\ln(1-\sqrt{1+\alpha})}{\ln 2}$, όπου πρέπει $1-\sqrt{1+\alpha}>0 \Leftrightarrow$

$1+\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha<0$. Δηλ. η δεύτερη λύση, υπάρχει μόνο αν, $\alpha>0$, όπως είχε φανεί απ' τη γραφική λύση.

---

72. Θεωρούμε την $f_\nu(x)=\frac{LN\ x}{\sqrt[\nu]{x}}$ που ορίζεται στο R_+. (Ειδικά η $f_1(x)=LN\ x/x$.

1. Να δοθεί ο πίνακας μεταβολών της.

2. Εστω (C_ν) η καμπύλη που αντιστοιχεί στην $f_\nu(x)$.

α. Εστω επίσης ν, μ δύο φυσικοί: $0<\nu<\mu$ Να εξακριβωθεί η σχετική θέση των (C_ν), (C_μ)

β. Να χαραχτούν οι C_1, C_2.

(BACC. C 1983)

LN x: νεπέρειος λογάριθμος του x.

ΛΥΣΗ

1. Είναι $\lim\limits_{+\infty} f_\nu(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[\nu]{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\nu} x^{\frac{1-\nu}{\nu}}} =$

$= \lim\limits_{\infty} \frac{\nu}{\sqrt[\nu]{x}} = 0$. Ενώ $\lim\limits_{0^+} \frac{\ln x}{\sqrt[\nu]{x}} = -\infty$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt[\nu]{x} - \ln x\,(\sqrt[\nu]{x})'}{\sqrt[\nu]{x^2}} = \frac{\nu-\ln x}{\nu x\sqrt[\nu]{x}}$ άρα αν $\nu-\ln x>0$

$\Leftrightarrow x<e^\nu$ η $f(x)\nearrow$ ενώ για $x>e^\nu$ η $f(x)\searrow$.

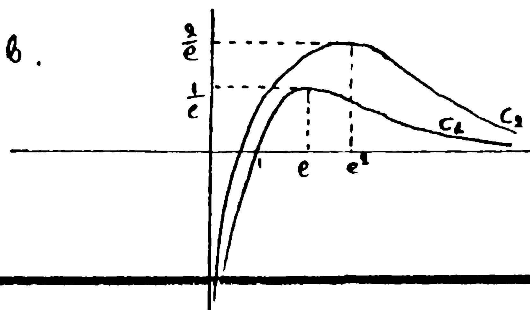
x	0		e^ν		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\nu}{e}$	$\searrow$	0

2. α. Για τις C_ν υπάρχουν οριζόντια ($y=0$) και κατακόρυφη ($x=0$) ασύμπτωτη.

$\forall x \in R$ $f_\nu(x) < f_\mu(x)$ δηλ. η C_μ βρίσκεται "πάνω" απ' τη C_ν. Επίσης τα ακρότατα πληρούν:

$\frac{\nu}{e} < \frac{\mu}{e}$ δηλ. έχουμε μια μετάθεσή τους, προς τα δεξιά.

β.



73. **1.** Εστω η $f(\chi)=LN(LN\chi)$ του $(1,\infty)\to R$. Να υπολογιστεί η $f'(\chi)$.

2. Εστω $\kappa \in N$ $\kappa \geq 2$: να δειχτεί ότι

$0 < LN(LN(\kappa+1)) - LN(LN\kappa) < \frac{1}{\kappa LN\kappa}$

3. Θέτω

$S_\nu = \frac{1}{2LN2} + \frac{1}{3LN3} + \cdots\cdots + \frac{1}{\nu LN\nu}$. Να δειχτεί ότι $S_\nu \to \infty$

(BACC. C 1983)

ΛΥΣΗ.

1. $[\ln(\ln x)]' = \frac{1}{x\ln x}$

2. Χρησιμοποιώ το Θ. μέσης τιμής για την $f(x) = \ln(\ln x)$ στο $(\kappa, \kappa+1)$ κ≥1. Τότε $\exists \xi \in (\kappa, \kappa+1)$:

$\ln(\ln(\kappa+1)) - \ln(\ln\kappa) = \frac{1}{\xi \ln\xi}$

Είναι $\kappa < \xi < \kappa+1 \Rightarrow \frac{1}{\kappa+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\kappa}$ (α)

$\Rightarrow \ln\kappa < \ln\xi < \ln(\kappa+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln(\kappa+1)} < \frac{1}{\ln\xi} < \frac{1}{\ln\kappa}$ (β)

(α) ∧ (β) $\Rightarrow 0 < \frac{1}{(\kappa+1)\ln(\kappa+1)} < \frac{1}{\xi\ln\xi} < \frac{1}{\kappa\ln\kappa} \Rightarrow$ ο.ε.δ.

3. Εφαρμόζω την προηγούμενη σχέση για $\kappa = 2, 3, \ldots \nu$

$\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) < \frac{1}{2\ln 2}$

$\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) < \frac{1}{3\ln 3}$

. . . .

$\ln(\ln(\nu+1)) - \ln(\ln\nu) < \frac{1}{\nu\ln\nu}$. Με πρόσθεση

έχω: $\Delta_\nu = \ln(\ln(\nu+1)) - \ln(\ln 2) < S_\nu \;\forall$ άρα

$\lim \Delta_\nu < \lim S_\nu$ αλλά $\lim \Delta_\nu = \infty$ άρα $\Rightarrow$

$S_\nu \to +\infty$.

---

74. A. 1. Να βρεθούν τα όρια από δεξιά στο σημείο 1, των:

$\frac{\ln x}{x-1}$ $\quad$ $\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$ $\quad$ $\frac{x-1-\ln x}{\ln x}$ $\quad$ $\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

2. Να μελετήσετε τις μεταβολές και το πρόσημο της $\gamma(x):[1,\infty)\to R$ με τύπο $\gamma(x)=x-1-\ln x$. Να εξαχθεί ότι $\forall x\geq 1$ έχουμε $1+\ln x \leq x$

B. 1. Έστω η $f(x)=\ln(1+\ln x)$. Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$ και να συμπεράνετε ότι το $\frac{f(x)}{x-1}$ τείνει στο 1 όταν $x \to 1^+$.

Γ. Εστω η $\Phi(\chi)=\begin{cases}\int_{\chi}^{\chi^2}\frac{1}{LNt}dt & \chi\neq 1\\ 0 & \chi=1\end{cases}$

1. Να δικαιλογίστε τον ορισμό της $\Phi(\chi)$ για $\chi>1$.

2. Να δείξετε μέσω του τύπου της διάταξης του ολοκληρώματος, ότι για $\chi>1$

$\frac{\chi-1-LN\chi}{LN\chi}\leq \Phi(\chi)\leq\frac{\chi-1-LN\chi}{LN(1+LN\chi)}$. Να εξαχθεί ότι η $\Phi(\chi)$ είναι συνεχής στο 1^+

3α. Θεωρώ την $g(t)=1/LNt$ στο $(1,\infty)$ και G μια αρχική της g στο $(1,\infty)$. Να εκφράστε την $\Phi(\chi)$ συναρτήσει των τιμών της G για $\chi>1$ Να υπολογίστε λοιπόν την $\Phi'(\chi)$

β. Απ' τα προηγούμενα να δειχτεί ότι η $\Phi(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1^+. Να βρεθεί η $\Phi'(\chi)_{\chi=1}$

(BACC. E . 1983)

ΛΥΣΗ.

A. 1. $\lim_{1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{1^+}\frac{1/x}{1}=1.$

$\lim_{1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{1^+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{1}{2}$

$\lim_{1^+}\frac{x-1-\ln x}{\ln x}=\frac{0}{0}=\lim_{1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0$

$\lim_{1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\ \dots\ \lim_{1^+}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$

2. $\lim_{\infty}\gamma(x)=\infty \qquad \lim_{1^+}\gamma(x)=1-1-0=0$

$\gamma'(x)=1-\frac{1}{x}$ που είναι $\gamma'(x)>0$ αν $x>1$ άρα στο $(1,\infty)$ η $\gamma(x)\nearrow$ (γν.). είναι $\gamma(x)\geq 0\ \forall x\in[1,\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow 1+\ln x\leq x\quad \forall x\geq 1.$

x	1		+∞
γ(x)	0	↗	+∞

Β. 1. $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)}$ άρα $f'(1) = 1$

Αλλά $f'(1) = 1 = \lim\limits_{1^{\pm}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{1^{+}} \dfrac{f(x)}{x-1}$.

Γ. 1. Πρέπει τα όρια του ολοκληρώματος να ορίζουν διάστημα στο R, δηλ. $1+\ln x < x$, που ισχύει $\forall x > 1$ απ' την A_2.

2. Είναι γνωστό ότι $\mu(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Στη περίπτωσή μας $M = \dfrac{1}{\ln(1+\ln x)}$ και $\mu = \dfrac{1}{\ln x}$

αφού η $\dfrac{1}{\ln x}$ στο διάστημα ολοκληρώσεως είναι συνεχής.

Έτσι $\dfrac{x-1-\ln x}{\ln x} \leq \Phi \leq \dfrac{x-1-\ln x}{\ln(1+\ln x)}$

Είναι $\lim\limits_{1^{\pm}} \Phi(x) = 0$ και $\Phi(0) = 0$ άρα η Φ συνεχής.

(Παίρνω τα όρια των άκρων της προηγούμενης ανισότητας).

3. α. Είναι $G'(t) = \dfrac{1}{\ln t}$. Επομένως $\Phi(x) = \int_{1+\ln x}^{x} \dfrac{1}{\ln t}dt =$

$= G(x)\Big|_{1+\ln x}^{x} = G(x) - G(1+\ln x)$. Άρα $\Phi'(x) = G'(x) -$

$- G'(1+\ln x)(1+\ln x)' = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x\ln(1+\ln x)}$

β. $\Phi'(1^{+}) = \lim\limits_{1^{+}} \dfrac{\Phi(x) - \Phi(1)}{x-1}$ αλλά

$\lim\limits_{1^{+}} \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \leq \lim\limits_{1^{+}} \dfrac{\Phi(x)}{x-1} \leq \lim\limits_{1^{+}} \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+\ln x)}$

γιατί, η ανισότητα δεν αλλάζει, αφού $x-1>0$. Αλλά τα ακραία όρια είναι ίσα με $-\frac{1}{2}$, το οποίο είναι η ζητούμενη παράγωγος.

---

75. Θεωρώ τις $f_1(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1}$, $f_2(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{2x^2+1}$

Α. **1.** Να γίνει η γραφική παράσταση C_1 της f_1. Να δειχτεί ότι η C_2, καμπύλη της f_2, είναι συμμετρική της C ως προς το κέντρο των αξόνων.

2. Να δειχτεί ότι, αν Μ είναι σημείο της C_1 με τετμημένη x, Ν σημείο της C_2 με την ίδια τετμημένη και Η η προβολή του Μ, στον $Ox \Rightarrow \vec{HM}\cdot\vec{HN}=-1$

3. Εστω C η ένωση των C_1 και C_2. Να δειχτεί ότι το (x,ψ) ανήκει στο C αν και μόνο αν

$\psi^2-2\sqrt{2}x\psi-1=0$

Β. **1.** Δείξτε ότι η $LN\, f_1(x)$ ορίζεται $\forall x\in R$

2. Εστω $g(x)=LN\, f_1(x)$. Να μελετηθεί η PARITY.

3. Μεταβολές της g. Να γίνει η γραφική της παράσταση.

4. Να δειχτεί ότι υπάρχει η αντίστροφη της g. Να χαραχτεί η καμπύλη της.

5. Να δειχτεί η σχέση: $\forall x\in R\ (2x^2+1)g''(x)+2xg'(x)=0$

6. Να αποδειχτεί επαγωγικά η σχέση:

$(2x^2+1)g^{(\nu+2)}(x)+2(2\nu+1)xg^{(\nu+1)}(x)+2\nu^2 g^{(\nu)}(x)=0$

Να εξαχθούν οι αριθμητικές τιμές των διαδοχικών παραγώγων της στο $x_0=0$.

(BACC. E PARIS 1983)

ΛΥΣΗ

Α. 1. Μεταβολές της $f_1(x)$:

$\lim_{\infty} f_1(x) = \infty \qquad \lim_{-\infty} f_1(x) = \lim_{-\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 - 1}{\sqrt{2}x - \sqrt{2x^2+1}} = 0$

Η καμπύλη C_1, βρίσκεται στο ημιεπίπεδο με θετικές τεταγμένες.

Μονοτονία: $f_1'(x) = \sqrt{2} + \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+1}}\right) =$

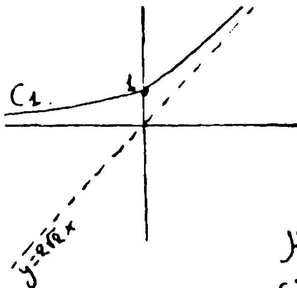
$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in R$ άρα η $f_1(x) \nearrow$

Ασύμπτωτοι. $\lim_{\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{\pm\infty}\left[\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}\right] = 2\sqrt{2} = \alpha$

$\lim_{\pm\infty}\left[f_1(x) - \alpha x\right] = \lim_{\pm\infty}\left[\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1} - 2\sqrt{2}x\right] =$

$= \lim_{\pm\infty}\left[\frac{2x^2+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x}\right] = 0$ δηλ. η $y = 2\sqrt{2}x$ ασύμπτωτος.

Τελικά, γραφικά η $f_1(x)$ είναι:



Είναι $f_2(-x) = -\sqrt{2}x - \sqrt{2x^2+1} = -f_1(x)$

Η σχέση αυτή δείχνει, ότι οι C_2, C_1 είναι συμμετρικές ως προς O.

(Αν ήταν $f_2 = f_1 = f$, η σχέση f θα ήταν περιττή)

2. Είναι $M(x, f_1)$, $N(x, f_2)$. $H(x, 0)$. Άρα

$\overrightarrow{HM} = (0, f_1) \quad \overrightarrow{HN} = (0, f_2) \Rightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{HN} = f_1 f_2 = -1$

3. $(x,y) \in (C_1 \cup C_2) \Leftrightarrow (x,y) \in C_1 \vee (x,y) \in C_2 \Leftrightarrow$

$(y = \sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}) \vee (y = \sqrt{2}x - \sqrt{2x^2+1}) \Leftrightarrow$

$(y-\sqrt{2}\,x-\sqrt{2x^2+1})(y-\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+1})=0 \Leftrightarrow$
$(y-\sqrt{2}\,x)^2-(2x^2+1)=0 \Leftrightarrow y^2+2x^2-2\sqrt{2}\,xy-2x^2-1=0$ ο.ε.δ.

B. 1. $\ln(\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+1})$. Πρέπει $\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+1}>0$. Αυτή ισχύει πάντα γιατί: $\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{2}\,x+|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$.
Αν $x>0$ γίνεται $x\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)>0 \quad \forall x>0$
Αν $x<0$ γίνεται $x\left(\sqrt{2}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)>0$ σαν γινόμενο αρνητικών όρων.

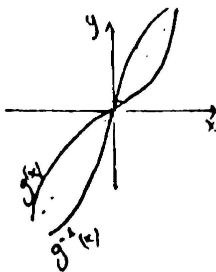
2. $g(-x)=\ln\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}\,x\right)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}\,x}=$

$=-\ln\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}\,x\right)=-g(x)$. Άρα περιττή.

3. Έχω $x\to\infty \Rightarrow g\to+\infty$
$x\to-\infty \Rightarrow g\to-\infty$ (αφού $f_1\to 0$)

$g'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+1}}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad g''(x)=\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{(2x^2+1)^{3/2}}$ άρα $x=0$ σ. καμπής,

και στα δεξιά x, τα κοίλα "άνω".



4. Είναι $g(x)=\ln\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+1}\right) \Leftrightarrow g^{-1}(x)=e^{\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1}}$
με γραφική παράσταση, συμμετρική της $g(x)$ ως προς $y=x$.

5. Αληθής είναι η $P(1)$. Έστω ισχύει η $P(k)$, θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

$P(k)$: $(2x^2+1)\,g^{(k+2)}+2(2k+1)\,x\cdot g^{(k+1)}+2k^2g^{(k)}=0$
$\Rightarrow 4x\,g^{(k+1)}+(2x^2+1)\,g^{(k+3)}+2(2k+1)\,g^{(k+1)}+2(2k+1)\,x\cdot g^{(k+2)}+2k^2g^{(k+1)}=0$
$\Rightarrow (2x^2+1)\,g^{(k+3)}+2x(2k+3)\,g^{(k+2)}+2(k+1)^2g^{(k+1)}=0$ ο.ε.δ.

Είναι $g'(0)=0$ $g''(0)=0$, απ το αναδρομικό τύπο προκύπτει ότι $g^{(\nu)}(0)=0$ $\forall \nu\in N$.

---

76. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases}\chi e^{\frac{1}{\chi}} & \text{για } \chi<0\\ 0 & \text{" } \chi=0\\ \chi^2 \ln\chi & \text{για } \chi>0\end{cases}$

1. Είναι η $f(\chi)$ παραγωγίσιμη στο $\chi=0$;
2. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.
3. Αν (Γ) είναι η καμπύλη της γραφικής παράστασής της $f(\chi)$, να δείξετε ότι η $\psi=\chi+1$, είναι ασύμπτωτη της (Γ). Να χαραχτεί η (Γ).

(BACC. C 1983)

ΛΥΣΗ.

1. $f'(0^-)=\lim\limits_{0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{0^-}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{0^+}\frac{1}{e^{1/x}}=0.$

Ομοίως $f'(0^+)=\lim\limits_{0^+}\frac{x^2\ln x}{x}=\lim\limits_{0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=$

$=\lim\limits_{0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{0^+}(-x)=0.$ Άρα $f'(0)=0$

2. Είναι $\lim\limits_{+\infty}f(x)=\lim\limits_{+\infty}x^2\ln x=\infty$.

$\lim\limits_{-\infty}f(x)=-\infty$. Για $x>0\Rightarrow f'(x)=x(1+2\ln x)$ άρα

για $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ η $f(x)\nearrow$ και για $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ η $f(x)\searrow$

Για $x<0$, $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ δηλ. στο $(-\infty,0)$ η $f(x)\nearrow$.

x	$-\infty$		0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	$+\infty$

Για κυρτά - κοίλα παρατηρώ

$x>0$, $f''(x)=3+2\ln x$ άρα τα κοίλα άνω, για $x>e^{-3/2}$ (6υ.)

$x<0$ $f''(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{e^{1/x}}{x}<0$ $\forall x<0$ άρα στο R_- τα κοίλα κάτω.

3. Ασύμπτωτοι

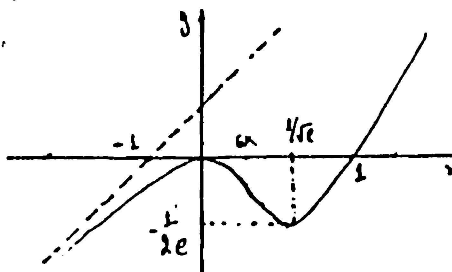
Εξετάζω το όριο:

$$\lim_{-\infty}\left(xe^{1/x}-x-1\right)=\lim_{-\infty}x\left(e^{1/x}-1-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{-\infty}\frac{e^{1/x}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{-\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}+\frac{1}{x^2}}{-1/x^2}=\lim_{-\infty}\left(e^{x}-1\right)=0.$$

Άρα η $y=x+1$ ασύμπτωτος στο $-\infty$.

Η γραφική παράσταση λοιπόν είναι:



77. Εστω η $f_\mu(x)=(x+\mu)e^{-x}$ $x\in R$, $\mu\in R$ και C_μ η αντίστοιχη καμπύλη.

A. 1. Μεταβολές της $f_\mu(x)$.

2. Να δειχτεί ότι ο xx' είναι ασύμπτωτος της $f_\mu(x)$

3. Να δειχτεί ότι οι ρίζες των f_μ, f'_μ, f''_μ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Εστω H_μ το σημείο της C_μ, όπου η εφαπτομένη της είναι // του Ox. Να γραφεί η εξίσωση που πληρεί το σύνολο (Γ) των σημείων H_μ, όταν το μ διαγράφει το R.

4. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης Δ_μ στο τυχόν σημείο $M_o(x_o, y_o)$ της C_μ

Να δειχτεί ότι όλες αυτές, σε σημεία με σταθερά τετμημένη x_0, έχουν ένα κοινό σημείο Τ.

5. Μελετήστε το πρόσημο της $f_1(x) - f_0(x)$

6. Χαράξτε τις Γ, C_0, C_1.

Β. 1. Να δειχτεί ότι: $f_\mu^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu f_{\mu-\nu}(x)$ ∀ν∈Ν*.

2. Αν λ∈R θέτουμε $u_0 = f_\mu(\lambda)$. Να δειχτεί αν είναι επίσης $u_\nu = f_\mu^{(\nu)}(\lambda)$ ότι ∀ν∈Ν*

$u_{\nu-1} + u_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot e^{-\lambda}$

Αν ρ∈Ν* να υπολογιστεί συναρτήσει του λ το άθροισμα $S_{2\rho-1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{2\rho-1}$. Να εξάγετε στη συνέχεια το άθροισμα $S_{2\rho}$ και να δείξετε ότι $S_{2\rho} = f_{\mu-\rho}(\lambda)$.

3. Ομοίως $F_{2\rho} = (\rho+1)S_{2\rho}$ αν $F_{2\rho} = u_0 + u_1 + \dots u_{2\rho}$.

ΛΥΣΗ

Α. 1. Π.Ο = R $\quad \lim_{-\infty} f_\mu(x) = (-\infty)(\infty) = -\infty$

$\lim_{+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{e^x} = 0 \qquad f'_\mu(x) = e^{-x}(1-x-\mu)$ μηδενίζεται

για $x = 1-\mu$ και αλλάζει πρόσημο. Άρα

x	$-\infty$		$1-\mu$		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$e^{\mu-1}$	↘	0

2. Προκύπτει απ το 1.

3. $f_\mu(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\mu \qquad f'_\mu(x) = 0 \Rightarrow (1-x-\mu)e^{-x} = 0$

$\Rightarrow x_2 = 1-\mu \qquad f''_\mu(x) = 0 \Rightarrow (x+\mu-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x_3 = 2-\mu$. Πράγματι είναι: $2x_2 = x_1 + x_3$.

Στο H_μ, μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος άρα $x_\mu = 1-\mu$. Τότε $y_\mu = f_\mu(x_\mu) = e^{\mu-1}$. Δηλ. $H_\mu(1-\mu, e^{\mu-1})$.

Με απαλοιφή του μ, έχω την αναλυτική εξίσωση των H_μ: $y = e^{-x}$.

4. Η εξίσωση εφαπτομένης στο (x_0, y_0) είναι:

(1) $y-(x_0+\mu)e^{-x_0}=(1-x_0-\mu)e^{-x_0}(x-x_0)$. Θα προσδιορίσω το ζεύγος (x,y), που πληροί την (1) $\forall \mu\in R$ και σταθερό x_0.
Η (1) γράφεται: $y-x_0e^{-x_0}-(1-x)(x-x_0)e^{-x_0}=\mu[e^{-x_0}-e^{-x_0}(x-x_0)]$.
Για να ισχύει για κάθε $\mu\in R \Rightarrow x=x_0+1,\ y=e^{-x_0}$. Άρα το $(x_0+1,\ e^{-x_0})$.

5. $f_1-f_0=(x+1)e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}>0 \quad \forall x\in R$

6. $C_0: y=xe^{-x} \quad C_1: y=(x+1)e^{-x} \quad (\Gamma): y=e^{-x}$

Τα αποτελέσματα του 5. φαίνονται γραφικά, αφού κάθε σημείο της C_1, βρίσκεται "πάνω" απ το αντίστοιχο σημείο της C_0, (με την ίδια τετμημένη). Η γραφική παράσταση, στο τέλος της άσκησης.

Β. 1. α. Εξετάζω για $\nu=1$: $f_\mu'=(1-x-\mu)e^{-x}=$
$=-(x+\mu-1)e^{-x}=(-1)^1 f_{\mu-1}(x)$

β. Έστω ότι $f_\mu^{(\kappa)}(x)=(-1)^\kappa f_{\mu-\kappa}(x)$,

γ. Τότε $f_\mu^{(\kappa+1)}(x)=(f_\mu^{(\kappa)})'=[(-1)^\kappa f_{\mu-\kappa}]'=(-1)^\kappa f_{\mu-\kappa}'=$

$=(-1)^\kappa[(x+\mu-\kappa)e^{-x}]'=(-1)^\kappa[e^{-x}-(x+\mu-\kappa)e^{-x}]=(-1)^\kappa[-1-x-\mu+\kappa]e^{-x}=$

$=(-1)^{\kappa+1}[x+\mu-\kappa-1]e^{-x}=(-1)^{\kappa+1}f_{\mu-\kappa-1}(x)$ ο.ε.δ.

2. Είναι $u_\nu=f_\mu^{(\nu)}(\lambda)=(-1)^\nu f_{\mu-\nu}(\lambda)=(-1)^\nu(\lambda+\mu-\nu)e^{-\lambda}$.
$u_{\nu-1}+u_\nu=f_\mu^{(\nu-1)}(\lambda)+f_\mu^{(\nu)}(\lambda)=$

$=(-1)^{\nu-1}f_{\mu-\nu-1}(\lambda)+(-1)^\nu f_{\mu-\nu}(\lambda)=(-1)^{\nu-1}(\lambda+\mu-\nu+1)e^{-\lambda}+(-1)^\nu(\lambda+\mu-\nu)e^{-\lambda}=$

$=(-1)^{\nu-1}e^{-\lambda}$

$u_0+u_1=e^{-\lambda}$

$u_2+u_3=(-1)^2 e^{-\lambda}$

. . . .

$u_{2p-2}+u_{2p-1}=(-1)^{2p-2} e^{-\lambda}$. Με πρόσθεση έχω

$$\sum_0^{2p-1} u_i = e^{-\lambda}(1+1+\cdots 1) = p e^{-\lambda}$$

$$S_{2p}=S_{2p-1}+u_{2p}=pe^{-\lambda}+f_{\mu-2p}(\lambda)=pe^{-\lambda}+(\lambda+\mu-2p)e^{-\lambda}=$$

$$=(\lambda+\mu-p)e^{-\lambda}=f_{\mu-p}(\lambda)$$

3. $F_{2p}=u_0+u_2+\cdots u_{2p}=$

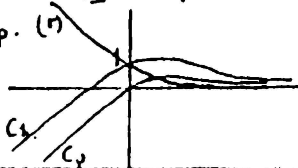
$$=f_\mu(\lambda)+(-1)^2 f_{\mu-2}(\lambda)+\cdots(-1)^{2p}f_{\mu-2p}(\lambda)=$$

$$=e^{-\lambda}(\lambda+\mu+\lambda+\mu-2+\lambda+\mu-4+\cdots\lambda+\mu-2p)=$$

$$=e^{-\lambda}[(p+1)(\lambda+\mu)-(2+4+6+\cdots 2p)]=$$

$$=e^{-\lambda}[(p+1)(\lambda+\mu)-p(p+1)]=e^{-\lambda}(p+1)(\lambda+\mu-p)=$$

$$=(p+1)f_{\mu-p}(\lambda)=(p+1)S_{2p}. \text{ (1)}$$



78. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_\nu(x)=\begin{cases}\nu x+|x|\ln x^2 & \text{αν } x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Παριστάνουμε με C_ν την αντίστοιχη καμπύλη της $f_\nu(x)$ με C_ν^+ το τμήμα της C_ν με θετικές τετμημένες και με C_ν^- το τμήμα της με αρνητικές τετμημένες.

1. Να δοθούν οι εκφράσεις της $f_\nu(x)$ για θετικά και αρνητικά x. Να δειχτεί ότι η $f_\nu(x)$ είναι συνεχής στο 0. Είναι και παραγωγίσιμη στο 0;

2. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.

3. Εστω A_ν το σημείο της C_ν, στο οποίο η εφαπτομένη στη C_ν^+ είναι // με τον Οχ. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του A_ν. Να δειχτεί ότι τα A_ν όταν το ν διατρέχει το N, ανήκουν σε σταθερή ευθεία D, την οποία να προσδιορίσετε.

4. Εστω B_ν το σημείο τομής (εκτός του O), της C_ν^+ με τον Οχ. Να δείξτε ότι, η εφαπτομένη της C_ν στο B_ν, έχει διεύθυνση ανεξάρτητη του ν.

5. Εστω για $\forall \chi \in R^+$ η $g(\chi)=f_0(\chi)$. Να δειχτεί ότι $\forall \chi \in R^+$, $f_\nu(\chi \cdot e^{-\nu/2}) = e^{-\nu/2} g(\chi)$.

6. Να χαραχτεί η C_2.

(BACC. SERIE E. 1983)

ΛΥΣΗ

1. $f_\nu(x) = \begin{cases} \nu x + x\ln x^2 & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{'' } x=0 \\ \nu x - x\ln x^2 & \text{'' } x<0 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{0^\pm} f_\nu(x) = \lim\limits_{0^\pm}(\nu x \pm x\ln x^2) = 0 \pm (-\infty) = \lim\limits_{0^\pm} \dfrac{\ln x^2}{1/x} =$

$= \lim\limits_{0^\pm} \dfrac{1/x^2 \, 2x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{0^\pm}(-2x) = 0 = f_\nu(0)$ άρα συνεχής στο 0.

Επίσης είναι $\lim\limits_{0^\pm} \dfrac{f_\nu(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{0^\pm}(\nu \pm \ln x^2) = \mp\infty$ άρα

δέν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2. $\lim\limits_{+\infty} f_\nu(x) = \infty$, $\lim\limits_{-\infty} f_\nu(x) = +\infty$

Για $x>0$, $f_\nu'(x) = \nu + \ln x^2 + 2$ άρα στο $(0, e^{-\frac{\nu+2}{2}})$ ↘ και στο $(e^{-\frac{\nu+2}{2}}, \infty)$ ↗

Για $x<0$, $f_\nu'(x) = \nu - \ln x^2 - 2 > 0 \Rightarrow 2\ln|x| < \nu+2 \Rightarrow$

την G. Κι επειδή έχουν κοινό πεδίο ορισμού (το R) προκύπτει, ότι οι δύο σχέσεις, έχουν το ίδιο γράφημα. Επομένως η εικόνα της G, μέσω του T, είναι η ίδια η C.

3. Απόδειξη για το φραγμένο:

Θα δειχτεί επαγωγικά:

Ισχύει $|\alpha_0| < \frac{1}{e}$. Έστω $|\alpha_\nu| < \frac{1}{e}$ Τότε:

$$|\alpha_{\nu+1}| = |-\alpha_\nu \ln|\alpha_\nu|| = |\alpha_\nu|\,|\ln|\alpha_\nu|| < |\alpha_\nu|\,|\alpha_\nu| = |\alpha_\nu|^2 < \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e}$$

(Ισχύει για $x>0$ $\ln x < x$) Άρα η α_ν φραγμένη.

Για τη μονοτονία θεωρώ τη διαφορά:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -\alpha_\nu \ln|\alpha_\nu| - \alpha_\nu = -\alpha_\nu(\ln|\alpha_\nu| + 1) > 0 \quad \forall \nu \in N$$

(αφού $|\alpha_\nu| < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln|\alpha_\nu| < -1$ ει $\ln|\alpha_\nu| + 1 < 0$ και η (α_ν) είναι θετικών όρων). Άρα είναι γν. αύξουσα.

Επομένως είναι συγκλίνουσα. Έστω ξ το όριο.

Τότε $\xi = -\xi \ln\xi \Leftrightarrow \ln\xi = -1 \Leftrightarrow \xi = 1/e$

(διαδικασία γνωστή απ το βιβλίο του Οργανισμού).

---

86. Έστω $F_\nu(x) = x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu$ $x \in (0,1]$ και $F_\nu(0)=0$ ορισμένη στο $[0,1]$

1.α. Να μελετηθεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της F_ν στο 0,

β. Να δειχτεί ότι η F_ν παίρνει μέγιστη τιμή για $x = \alpha_\nu = e^{-\nu}$. Θέτουμε $\beta_\nu = F_\nu(\alpha_\nu)$. Να υπολογιστεί το β_ν συναρτήσει του ν.

γ. Να δοθεί ο πίνακας μεταβολών της F_ν.

2. α. Να μελετηθεί η (α_ν) ως προς τη σύγκλιση.

β. Να δειχτεί η ανισότητα: $\forall x \in [0, e^{-\nu}]$ $F_\nu(x) \geq \frac{b_\nu}{a_\nu} x$.

(BACC/ C PARIS 1984)

ΛΥΣΗ

1. α. Το αμφισβητούμενο σημείο συνέχειας είναι το 0.

Έχουμε $\lim_{0^+} F_\nu(x) = \lim_{0^+} x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu = 0\cdot\infty = \lim_{0^+} \frac{\left[\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$

$= \lim_{0^+} -\nu\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\nu-1} = -\infty$. Άρα δεν είναι συνεχής στο 0.

Εξετάζουμε τη παράγωγο στο $x_0 = 0$

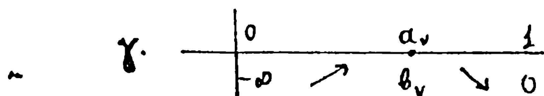
$F'(0) = \lim_{0^+} \frac{x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu}{x} = \infty$. Δεν υπάρχει παράγωγος στο 0.

β. Είναι $F'_\nu(x) = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu - \nu\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\nu-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\ln\frac{1}{x} = \nu \Leftrightarrow x = e^{-\nu}$. Είναι η τετμημένη του μεγίστου.

Η τεταγμένη είναι το $b_\nu = F_\nu(a_\nu) = e^{-\nu}(\ln e^\nu)^\nu = e^{-\nu}\cdot\nu^\nu$.

γ.



2. α. Για τον αναγνώστη (μηδενική ακολουθία).

β. Αφού $x \leq e^{-\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq e^\nu \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x} \geq \nu \Leftrightarrow$

$\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu \geq \nu^\nu \Leftrightarrow$ επειδή $x>0$ $x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\nu \geq x\cdot\nu^\nu \Leftrightarrow$

$F_\nu(x) \geq x\,\frac{b_\nu}{a_\nu}$ (απ το 1 β).

87. Να λυθούν στο R οι εξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma(x+3)+\lambda o\gamma(x+2)=\lambda o\gamma(x+11)$
2. $\lambda o\gamma(x^2+5x+6)=\lambda o\gamma(x+11)$
3. $\lambda o\gamma(-x-2)=\lambda o\gamma\frac{-x-11}{x+3}$
4. $\lambda o\gamma(x+2)=\lambda o\gamma(-x-11)-\lambda o\gamma(x+3)$

(BACC. D'OURTE MER)

ΛΥΣΗ

1. Ορίζεται στο $(-2,\infty)$. Σ' αυτό το διάστημα γίνεται $(x+3)(x+2)=x+11 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$ με $x=1$ ή $x=-5$. Άρα η μοναδική λύση της είναι η $x'=1$.

2. Το τριώνυμο x^2+5x+6 έχει ρίζες τα -2, -3. Άρα η εξίσωση ορίζεται στο $(-11,-3)\cup(-2,\infty)$. Τώρα λοιπόν έχουμε ρίζες τις $x'=1$ και $x''=-5$

3. Αυτή ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες το $x+2<0$ και $(x+3)(x+11)<0$ δηλ. στο $(-11,-3)$. Σ' αυτό το διάστημα γράφεται:
$(x+2)(x+3)=x+11$ άρα δέχεται μόνον την $x''=-5$

4. Δεν έχει πεδίο ορισμού. Άρα δεν έχει λύση.

---

88. 1. Να μελετηθεί το πρόσημο του $x+1$.
2. Να λυθεί στο R η εξίσωση $\frac{1}{\lambda o\gamma(x+1)}=4$
3. Ομοίως η $\lambda o\gamma|x+1|=0$
4. Ομοίως η $\lambda o\gamma|x+1|=\lambda o\gamma 2$.

(BACC/ MONTPELLIER)

ΛΥΣΗ.

1. Το $x+1>0$ για $x>-1$ και το $x+1<0$ για $x<-1$

2. $\lambda o\gamma(x+1)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x+1=e^{1/4} \Leftrightarrow x=\sqrt[4]{e}-1$

3. $\lambda o\gamma|x+1|\geq 0 \Leftrightarrow |x+1|\geq 1 \Leftrightarrow x+1\leq -1$ και $x+1\geq 1$
δηλ. το σύνολο των λύσεων είναι το $E=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

4. $\lambda o\gamma|x+1|=\lambda o\gamma 2 \Leftrightarrow |x+1|=2 \Leftrightarrow x+1=\pm 2 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$.

---

89. Εστω η συνάρτηση $F_\tau(\chi)=\begin{cases}\chi\,\ln|\chi|-(\chi-\tau)\ln|\chi-\tau| & \chi\neq 0,\tau \\ \tau\ln|\tau| & \gamma\iota\alpha\ \chi=0,\tau\end{cases}$

Συμβολίζουμε με C_τ η αντίστοιχη καμπύλη της F_τ

I. α. Να δειχτεί $\tau\in R$, $\chi\in R$:

$F_{-\tau}(\chi)=-F_\tau(-\chi)$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις C_τ, $C_{-\tau}$,

β. <u>Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $\tau>0$</u>

Να δειχτεί ότι η καμπύλη C_τ είναι συμμετρική ως προς άξονα συμμετρίας την εξίσωση $\chi=\tau/2$

2. Εστω το διάστημα $I_\tau=[\tau/2,+\infty)$

α. Να δειχτεί ότι $\forall\alpha\in R$ $\lim_{\eta\to 0}\frac{\ln(1+\alpha\eta)}{\eta}=\alpha$

β. Να δειχτεί ότι η F_τ είναι συνεχής στο διάστημα I_τ.

γ. Μονοτονία της F_τ, στο I_τ (απ΄τη παράγωγο).

3. α. Να δειχτεί ότι αν $\tau>2$, η F_τ δεν μηδενίζεται,.

β. Σε πόσα σημεία μηδενίζεται η F_2;

γ. Να δειχτεί ότι αν $\tau\in(0,2)$ η F_τ μηδενίζεται σε δύο σημεία, των οποίων ονομάζουμε τις τετμημένες $\alpha(\tau)$ και $\beta(\tau)$ $(\alpha<\beta)$.
Να δειχτεί ότι $\alpha(\tau)+\beta(\tau)=\tau$.

(BACC. E. 1983)

ΛΥΣΗ

1.α. Η $F_{-\tau}(x)=\begin{cases} x\ln|x|-(x+\tau)\ln|x+\tau| & x\neq 0,-\tau \\ -\tau\ln\tau & x=0,-\tau \end{cases}$

Η $-F_\tau(-x)=\begin{cases} x\ln|x|-(+x+\tau)\ln|x+\tau| & x\neq 0,-\tau \\ -\tau\ln\tau & x=0,-\tau. \end{cases}$

Οι δύο συναρτήσεις είναι πράγματι ίσες, άρα οι F_τ και $F_{-\tau}$ έχουν γράφημα με δείξη, της μορφής: (α,β), $(-\alpha,-\beta)$ αντίστοιχα, δηλ. οι C_t και C_{-t} είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

β. Οι τετμημένες δύο τυχόντων σημείων, συμμετρικών της ευθείας $x=\frac{\tau}{2}$ είναι: $x+\frac{\tau}{2}$, $-x+\frac{\tau}{2}$. Άρα πρέπει να δείξω ότι, για $\tau>0$ $f\left(x+\frac{\tau}{2}\right)=f\left(-x+\frac{\tau}{2}\right)$. Πράγματι:

$$F_\tau\left(x+\frac{\tau}{2}\right)=\begin{cases} \left(x+\frac{\tau}{2}\right)\ln\left|x+\frac{\tau}{2}\right|-\left(x-\frac{\tau}{2}\right)\ln\left|x-\frac{\tau}{2}\right| & \text{για } x\neq 0,\frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau}{2}\ln\frac{\tau}{2} & \text{για } x=0,\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

και $F_\tau\left(-x+\frac{\tau}{2}\right)=\begin{cases} \left(-x+\frac{\tau}{2}\right)\ln\left|-x+\frac{\tau}{2}\right|-\left(x-\frac{\tau}{2}\right)\ln\left|-x-\frac{\tau}{2}\right| \\ \frac{\tau}{2}\ln\frac{\tau}{2} \end{cases}$

Άλλα οι δύο τύποι των συναρτήσεων, σημειώτων.
Το συμπέρασμα, του 1β. θα παίξει ρόλο στα επόμενα. Η μελέτη στη συνέχεια θα γίνει για λόγους απλούστευσης στο $[\frac{\tau}{2}, \infty)$ (μισός κλάδος).

2.

α. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha}{1+\alpha x} = \alpha.$

β. Το σημείο όπου θα γίνει εξέταση για τη συνέχεια, είναι το $x_0 = \tau$. Σ' όλα τα άλλα σημεία του $[\frac{\tau}{2}, \infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής.

$$\lim_{\tau^+} F_\tau(x) = \lim_{\tau} [x \ln|x| - 0(-\infty)] =$$

$$= \lim_{\tau} \left[x\ln|x| - \frac{\ln|x-\tau|}{\frac{1}{(x-\tau)}}\right] = \lim_{\tau} [x\ln|x| + |x-\tau|] = \tau\ln\tau =$$

$= F_\tau(\tau)$ άρα η $F_\tau(x)$ συνεχής στο $x_0 = \tau$.

γ. Είναι
$$F'_\tau(x) = \begin{cases} \ln|x| - \ln|x-\tau| & x \in I_\tau - \{\tau\} \\ 0 & x = \tau \end{cases}$$

Εξετάζω το πρόσημό της:
Η $\ln|x| - \ln|x-\tau| = 0 \iff x = \frac{\tau}{2}$. Στο $x = \frac{\tau}{2}$ έχουμε ακρότατο. Η ανίσωση $\ln|x| - \ln|x-\tau| > 0$, έχει μοναδική λύση την $x > \frac{\tau}{2}$ (αφού $x > 0$)
Άρα η $F_\tau(x)$ είναι αύξουσα (γν.) στο I_τ, με σημείο ελαχίστου το $\left(\frac{\tau}{2}, F_\tau(\frac{\tau}{2})\right) = \left(\frac{\tau}{2}, \tau\ln\frac{\tau}{2}\right)$
Τελικά η $C_f(x)$ είναι καμπύλη συμμετρική ως προς την $x = \frac{\tau}{2}$, με ελάχιστο πάνω σ' αυτόν τον άξονα συμμετρίας.

3. α. Για να μηδενίζεται η F_τ, πρέπει

η C_τ, να τέμνει τον άξονα $Ox'x$, δηλ. το ελάχιστο αυτής, να έχει τεταγμένη ≤ 0. Δηλ. η F_τ μηδενίζεται, όταν $\tau \ln \frac{\tau}{2} \leq 0$, κι επειδή $\tau > 0$, πρέπει $\ln \frac{\tau}{2} \leq 0$ άρα $\ln \frac{\tau}{2} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \tau \leq 2$. Επομένως για $\tau > 2$, η $F_\tau(x)$ δεν μηδενίζεται.

β. Οταν $\tau = 2$, τότε $\tau \ln \frac{\tau}{2} = 0$ δηλ. η C_τ εφάπτεται στον $x'x$, δηλ. η $F_\tau(x)$ μηδενίζεται.

γ. Όταν $t \in (0,2)$ ει $\ln \frac{\tau}{2} < 0$, άρα η C_τ τέμνει τον $x'x$, σε δυό σημεία, έστω τα $\alpha(\tau)$ και $\beta(\tau)$. Όμως αυτά θα είναι συμμετρικά του σημείου με τετμημένη $x = \frac{\tau}{2}$ (1. β). Άρα θα ισχύει $\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2} = \frac{\tau}{2} \Leftrightarrow \alpha(\tau) + \beta(\tau) = \tau$.

---

90. Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων $F_\lambda(\chi) = 1 + \ln(1 + \lambda\chi)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

Α. 1. Να δοθεί το πεδίο ορισμού των F_λ (διακρίνετε τις περιπτώσεις $\lambda > 0$, $\lambda < 0$)

2.α. Υπάρχει τομή στις καμπύλες C_λ και $C_{-\lambda}$;

.3. Θέτω $\Phi_\lambda = F_\lambda(\chi) - \chi$

α. Υποθέτω ότι $\lambda < 0$. Να μελετηθούν οι μεταβολές της Φ_λ. Να εξαχθεί το πλήθος των σημείων τομής της C_λ και της $D: \psi = \chi$.

β. Εστω $\lambda > 0$. Να μελετηθούν πάλι οι μεταβολές της Φ_λ. Να διαπιστώσετε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $\Phi_\lambda(\chi)$, όταν το χ διαγράφει το πεδίο ορισμού, είναι το $\mu(\lambda) = 1/\lambda + \ln\lambda$

γ. Μελετήστε, όταν $\lambda \in (0, \infty)$ τις μεταβολές και το πρόσημο του $\mu(\lambda)$

δ. Πόσα είναι τα κοινά σημεία των C_λ και D, όταν $\lambda>0$;

Β. Μελετούμε την περίπτωση όπου $\lambda=1$

Ι α. Παραστήστε γραφικά την C_1 και την D.

β. Ονομάζουμε P και Q τα σημεία τομής τους. Είναι P(p) και Q(q) με $p<0$. Να δειχτεί ότι $2<q<3$

2. Εστω η (α_ν) με $\alpha_0=2$ $\alpha_{\nu+1}=F(\alpha_\nu)$

α. Να παρασταθούν στο επίπεδο, με τη βοήθεια της C_1 οι όροι α_0, α_1, α_2

β. Να δειχτεί ότι η (α_ν) είναι αύξουσα και φραγμένη άνω, απ' το q.

(SERIE C. BESANCON 1985)

ΛΥΣΗ

Α. 1. $\lambda>0$. Πρέπει $1+\lambda x>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow D_\lambda=(-\frac{1}{\lambda},\infty)$

Ομοίως για $\lambda<0 \Leftrightarrow D_\lambda=(-\infty,-\frac{1}{\lambda})$.

2. Οι δυό καμπύλες συνδέονται (κοινό σημείο) στο $x_0=0$. Τότε $F_\lambda(0)=1$ $\forall\lambda\in R$.

3.α. ΠΡΟΣΟΧΗ: Ουσιαστικά θα διερευνήσουμε, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1+\ln(1+\lambda x)=x$ (1), για τα διάφορα λ.

<u>Για $\lambda<0$</u> $\lim_{-\frac{1}{\lambda}}\Phi_\lambda(x)=\lim_{-1/\lambda}\left[1+\ln(1+\lambda x)-x\right]=-\infty+\frac{1}{\lambda}=-\infty$ και $\lim_{-\infty}\Phi_\lambda(x)=+\infty$. Επίσης $\Phi'_\lambda(x)=\frac{\lambda}{1+\lambda x}-1<0$ (αφού ο παρονομαστής θετικός, και ο αριθμητής αρνητικός). Άρα η $\Phi_\lambda(x)$ είναι γν. φθίνουσα για $\lambda<0$. Τελικά:

x	$-\infty$		$-1/\lambda$
$\Phi_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

και επειδή η $\Phi_\lambda(x)$ συνεχής, άρα κάπου μηδενίζεται δηλ. η (1) έχει μία λύση για $\lambda<0$.

β. Όμοιως για $\lambda>0$. $\lim_{-\infty}[1+\ln(1+\lambda x)-x]=\lim_{-\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln(1+\lambda x)}{x}-1\right]\cdot x=$ (de l'Hospital)

$=\lim_{-\infty} x\left[\frac{1}{x}+\frac{\lambda}{1+\lambda x}-1\right]=+\infty$ Και τελικά έδειξα $\varphi'_\lambda(x)=\frac{1}{1+\lambda x}-1=0\Leftrightarrow$ $x=1-\frac{1}{\lambda}$, και $\varphi_\lambda(x)_{max}=\frac{1}{\lambda}+\ln\lambda$, ο πίνακας μεταβολών είναι

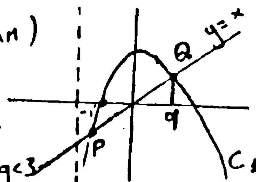
x	$-\frac{1}{\lambda}$		$1-\frac{1}{\lambda}$		∞
$\varphi_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{\lambda}+\ln\lambda$	↘	$-\infty$

Το πλήθος των λύσεων της $\varphi_\lambda(x)$ $\lambda>0$, εξαρτάται, απ το πλήθος των σημείων, στα οποία, η C_λ τέμνει τον Ox, κι αυτά πάλι, απ' τη θέση του μεγίστου της. Άρα θα διερευνήσω τη θέση, αυτού του μεγίστου για τα διάφορα λ. Προκύπτει ο εξής πίνακας:

λ	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{\lambda}+\ln\lambda$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Δηλ. το μέγιστο, είναι πάντα θετικό, άρα δύο σημεία τομής, άρα η (1) δύο λύσεις για $\lambda>0$.

Β Ι.α. Απλή ($x=-1$ ασύμπτωτη, κλπ)



β. Είναι $\varphi_1(2)=\ln 3-1>0$
$\varphi_1(3)=\ln 4-2<0$ Άρα για $2<q<3$

Έχω $\varphi_1(q)=0\Leftrightarrow 1+\ln(1+q)=q$ (2) για $2<q<3$

2.α Οι a_0, a_1, a_2 είναι στον άξονα των Ox, δεξιά του $a_0=2$ και αριστερά του q αφού

$2<a_1=1+\ln(1+2)<1+\ln(1+q)=q$ απ τη (2)

β. Οι αποδείξεις επαγωγικά:

· Αύξουσα:

$a_1>a_0$

Έστω $a_\nu>a_{\nu-1}\Leftrightarrow 1+a_\nu>1+a_{\nu-1}\Leftrightarrow 1+\ln(1+a_\nu)>1+\ln(1+a_{\nu-1})$

$\Leftrightarrow a_{\nu+1}>a_\nu$ ο.ε.δ.

Φραγμένη: $a_0=2<q$ · Έστω $a_\nu<q \Rightarrow$

$a_{\nu+1}=1+\ln(1+a_\nu)<1+\ln(1+q)=q$ απ τη (2).

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.

91. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$F(\chi)=\frac{e^{\chi}-1}{e^{\chi}+1} \quad \text{και} \quad G(\chi)=\left|\frac{1+\chi}{1-\chi}\right|$$

Α. 1. Να δειχτεί ότι η F είναι περιττή. Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να χαραχτεί η καμπύλη της.

2. Εστω $\alpha\in R$ και $\alpha\geq 0$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν $A(\alpha)$ του μέρους του επιπέδου που ορίζεται απ'τις: $0\leq\chi\leq\alpha$, $F(\chi)\leq\psi\leq 1$ (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ότι $1=(1+e^{\chi})-e^{\chi}$). Να μελετηθεί το όριο αυτού του εμβαδού, όταν το $\alpha\to+\infty$

Β. 1. Εστω η νέα συνάρτηση $H(\chi)=F(\chi)-\chi/2$ Μελετήστε τις μεταβολές της και το πρόσημό της, για τις διάφορες τιμές του χ.

2. Θεωρούμε την αναδρομική ακολουθία (σ_{ν}) με $\sigma_0=1$ και $\forall\nu\in N$ $\sigma_{\nu+1}=F(\sigma_{\nu})$.

Να δειχτεί ότι $\forall\nu$ $0\leq\sigma_{\nu+1}\leq\sigma_{\nu}/2$. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας.

Γ. 1. Η συνάρτηση G είναι άρτια ή περιττή; Μελετήστε τις μεταβολές της και χαράξτε την καμπύλη.

2. Εστω $\beta\in R$ και >2. Να υπολογιστεί (με ολοκλήρωση κατά μέρη) η ελάχιστη τιμή $B(\beta)$ της G στο $[2,\beta]$ που ορίζεται:

$$B(\beta)=\frac{1}{\beta-2}\int_2^{\beta}G(\chi)d\chi.$$ Να δείξτε ότι το $B(\beta)$ τείνει στο 0 όταν το $\beta\to\infty$

Δ. 1. Να δειχτεί ότι ο περιορισμός της G στο $(-1,1)$ είναι 1-1 του $(-1,1)$ στο R. Να βρεθεί η αντίστροφη σχέση.

2. Αν $\chi_0\in R-\{-1,1\}$ να λυθεί η εξίσωση:

$$G(\chi)=G(\chi_0)$$

85. Δίνεται η συνάρτηση F που ορίζεται:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \chi \in R_+^* \quad F(\chi)=-\chi\, \ell\eta\chi \\ F(0)=0 \end{array}\right\}$$

1. α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της και να χαραχτεί η καμπύλη της (Γ).

β. Να μελετηθεί, για τα διάφορα χ, η σχετική θέση της καμπύλης (Γ) και της ευθείας (D): ψ=χ.

2. Εστω G η συνάρτηση:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \chi \in R^* \quad G(\chi)=-\chi\, \ell\eta|\chi| \\ G(0)=0 \end{array}\right\}$$

α. Κάνοντας χρήση τα προηγούμενα αποτελέσματα, να χαράξτε την καμπύλη της G.

β. Εστω T, ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο M(χ,ψ) αντιστοιχεί το σημείο $M_1(\chi_1,\psi_1)$ με $\chi_1=e\chi$, $\psi_1=-e\chi+e\psi$. Ποιά είναι η εικόνα της G, μέσω του T;

3. Ορίζουμε την ακολουθία (α_ν) ως εξής:

$\alpha_0 \in (0,\ 1/e)$

$\alpha_{\nu+1}=G(\alpha_\nu)\ \forall \nu \in N$ (G, η προηγούμενη συνάρτηση)

Να δείξτε ότι η (α_ν) είναι φραγμένη, και γνησίως αύξουσα. Είναι συγκλίνουσα; Να βρεθεί το όριό της.

(BACC. C PARIS 1984)

ΛΥΣΗ

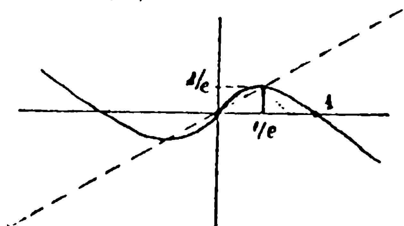
1. α. $\lim\limits_{0^+} F(x) = \lim \dfrac{-\ell\eta x}{1/x} = 0 \qquad \lim\limits_{+\infty} F(x) = -\infty$

$F'(x) = -\ell\eta x - x\dfrac{1}{x} = -1-\ell\eta x$ Άρα για $x<\dfrac{1}{e}$ η F είναι

γνησίως αύξουσα. $F\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}(-1) = \frac{1}{e}$. Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	0		$1/e$		1		∞
$F(x)$	0	↗	$1/e$	↘	0	↘	$-\infty$

Η γραφική παράσταση της F είναι (μόνο το τμήμα με θετικές τεταγμένες).



β. Συγκρίνω τις τεταγμένες των σημείων της ευθείας και της καμπύλης (Γ): Έστω $x > -x\ln x \Leftrightarrow -\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$. Άρα για $x > \frac{1}{e}$, η ευθεία D, βρίσκεται "πάνω" απ' την καμπύλη (Γ), όπως φαίνεται και στο σχήμα.

2.α. Η $G(x)$ ταυτίζεται με την $F(x)$ στο $[0, \infty)$. Είναι δέ $G(-x) = x\ln|-x| = x\ln|x| = -G(x)$. Δηλ. είναι περιττή συνάρτηση. Άρα η καμπύλη της είναι συμμετρική ως πρός κέντρο. Τελικά είναι ολόκληρη η καμπύλη του σχήματος.

β. Θα βρώ τη σχέση των νέων συντεταγμένων μεταξύ τους: Απ τις δοθείσες έχω: $x = \frac{x_1}{e}$, $y = \frac{x_1 + y_1}{e}$

Άρα η $y = -x\ln|x|$ γίνεται:

$$\frac{x_1 + y_1}{e} = -\frac{x_1}{e}\ln\left|\frac{x_1}{e}\right| \Leftrightarrow y_1 = -x_1\ln\left|\frac{x_1}{e}\right| - x_1 \Leftrightarrow$$

$$y_1 = -x_1\left(\ln\frac{|x_1|}{e} + 1\right) \Leftrightarrow y_1 = -x_1\left(\ln|x_1| - \ln e + 1\right) \Leftrightarrow$$

$y_1 = -x_1\ln|x_1|$. Δηλ. τα x_1, y_1 πληρούν την

$|x| < e^{\frac{\nu+2}{2}}$ άρα στο $(-\infty, -e^{\frac{\nu+2}{2}})$ ↘ και στο $(-e^{\frac{\nu+2}{2}}, 0)$ ↗

Συμ.

x	$-\infty$		$e^{-\frac{\nu+2}{2}}$		0		$e^{\frac{\nu+2}{2}}$		$+\infty$
$f_0(x)$	∞	↘		↗	0	↘		↗	

3. $f_0'(x_0)=0 \quad x_0 \in R^+ \Rightarrow x_0 = e^{-\frac{\nu+2}{2}}$ άρα $A_\nu(e^{-\frac{\nu+2}{2}}, -2e^{-\frac{\nu+2}{2}})$ άρα η $D: y=-2x$ σταθερή.

4. $\nu x + x\ln x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$ και $\ln x^2 = -\nu \Rightarrow x = e^{-\nu/2}$.
Άρα $f'(e^{-\frac{\nu}{2}}) = \nu + \ln e^{-\nu} + 2 = 2$ σταθ.

5. $f_0(x e^{-\nu/2}) = \nu x e^{-\nu/2} + x e^{-\nu/2} \ln (x e^{-\nu/2})^2 = \nu x e^{-\nu/2} + x e^{-\nu/2} \ln(x^2 e^{-\nu}) =$
$= \nu x e^{-\nu/2} + x e^{-\nu/2}[2\ln x - \nu] = x e^{-\nu/2} \ln x^2 = e^{-\nu/2} g(x)$

6. Για τον αναγνώστη.

---

79. 1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της $f(x) = \frac{LNx}{x}$

2. Εστω η $F(x) = 1/2\,(LNx)^2$. Να δειχτεί ότι αν $x \geq e$: $\frac{LN(x+1)}{x+1} \leq F(x+1) - F(x) \leq \frac{LNx}{x}$

Να εξαχθεί στη συνέχεια το όριο της ακολουθίας (α_ν) που ορίζεται : $\alpha_1 = LN1/1 \quad \alpha_2 = LN1/1 + LN2/2 \ldots$
$\ldots \alpha_\nu = LN1/1 + LN2/2 + \ldots + LN\nu/\nu$.

BACC/ E, 1983)

ΛΥΣΗ.

1. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ Π.Ο $(0, \infty)$ $\lim_{+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{0} f(x) = -\infty$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ δηλ. για $x<e$ ↗ και για $x>e$ ↘

$f''(x) = \frac{2x\ln x - 3x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ δηλ. το $\sqrt{e^3}$ σ. καμπής

Γραφική παράσταση αυτή.

2. Είναι $F'(x) = f(x)$

Για το διάστημα $[x, x+1]$ με $x \geq e$ (επειδή η $f(x)$ ↘)

ισχύει:

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} \leq \int_x^{x+1} f(x)\,dx \leq \frac{\ln x}{x}$$

αφού οι ακρες τιμές της συνεχούς και φθίνουσας $f(x)$ στο $[x, x+1]$ είναι οι $f(x)$, $f(x+1)$. Είναι όμως:

$$\int_x^{x+1} f(x)\,dx = F(x)\Big|_x^{x+1} = F(x+1) - F(x)$$ ο.ε.δ.

Στη συνέχεια έχω:

$$F(2) - F(1) \leq \frac{\ln 1}{1}$$
$$F(3) - F(2) \leq \frac{\ln 2}{2}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$F(\nu+1) - F(\nu) \leq \frac{\ln \nu}{\nu}$$

$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$F(\nu+1) - F(1) \leq S$ ($F(1)\to 0$). Αλλά

$\lim\limits_{\infty} F(\nu+1) = \infty$ άρα $S \to \infty$. (Διάταξη και όρια).

80.Α. Έστω $f(x)=x-4+1/4\ \ln|x|$, με $D=R^*$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.

2. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ δέχεται στο R μια ρίζα α: $3<\alpha<4$.

3. Απ το προηγούμενο ερώτημα να υπολογίστε το πρόσημο της $f(x)$ στα διαστήματα : $(-\infty,0)$, $(0,\alpha)$, (α,∞).

Β. Θα υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό α, κατά προσέγγιση εκατοστού.

1. Έστω η $g(x)=4-1/4\ \ln|x|$ με $D=R^*$

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της g. Να δειχτεί ότι η εικόνα του $[3,4]$ μέσω της περιέχεται στο ίδιο διάστημα $[3,4]$

β. Να δειχτεί ότι το α, είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=x$

Γ. Θεωρούμε την ακολουθία $u_0=3$ και $u_{\nu+1}=g(u_\nu)$ $\forall \nu\in N$.

α. Να δειχτεί ότι $\forall \nu\in N$

$$3\le u_\nu\le 4$$

β. Να δειχτεί ότι $\forall \nu\in N$ οι αριθμοί $(u_\nu-\alpha)$ και $(u_{\nu+1}-\alpha)$ είναι ετερόσημοι.

γ. $\forall x\in[3,4]\Rightarrow|g'(x)|\le 1/12$

δ. $\forall \nu\in N$ $|u_{\nu+2}-u_{\nu+1}|\le\frac{1}{12}|u_{\nu+1}-u_\nu|$ απ όπου έχουμε $\nu\in N$ $|u_{\nu+1}-u_\nu|\le 1/12^\nu$

ε. Να εξαχθεί μια τιμή του α, κατά προσέγγιση εκατοστού.

(BACC E. 1983)

ΛΥΣΗ

Α. 1. $\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ (Οι απροσδιόριστες μορφές ως γνωστόν) άρα η εικόνα (πίνακας μεταβολών) της $f(x)$ εμφανίζεται ως εξής:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	0	$+\infty$

2. Το πρόσημο της $f(x)$ διατηρείται αρνητικό σε όλα τα $x<0$ και έχουμε:

$f(3) = -1 + \frac{\ln 3}{4} < 0$ αφού $\ln 3 < 4 \Leftrightarrow (\ln 3 < \ln e^4)$

Επίσης $f(4) = \frac{\ln 4}{4} > 0$, κι αφού η $f(x)$ είναι συνεχής

στο $[3,4]$, άρα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(3)$ & $f(4)$.
Άρα $\exists a \in (3,4)$: $f(a) = 0$
Η συνέχεια του προβλήματος προετοιμάζει την εύρεση μιας τιμής αυτού του α.

3. Τα πρόσημα της συνάρτησης στα δοθέντα διαστήματα είναι $-$, $-$, $+$ αντίστοιχα.

Β. Οι μεταβολές της $g(x)$ δίνονται

x	$-\infty$		0	α		$+\infty$
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$		↘	$-\infty$

Όταν $3 \le x \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln 3 \le \frac{1}{4}\ln x \le \frac{1}{4}\ln 4 \Leftrightarrow$
$4 - \frac{1}{4}\ln 4 \le 4 - \frac{1}{4}\ln x \le 4 - \frac{1}{4}\ln 3 < 4$ και επειδή
$3 < 4 - \frac{1}{4}\ln 4$ αφού $\frac{1}{4}\ln 4 < 1 \Leftrightarrow (\ln 4 < 4)$ έχω τελικά
$3 \le g(x) \le 4$.

β. Η $g(x)=x \Leftrightarrow g(x)-x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$, η οποία απ τα προηγούμενα, έχει μοναδική λύση το α.

Γ. α. Επαγωγικά $u_0=3$ ισχύει
έστω $3 \le u_k \le 4 \Leftrightarrow$ απ το Β α. ότι $3 \le g(u_k) \le 4$
δηλ $3 \le u_{k+1} \le 4$ άρα ισχύει $\forall \nu \in N$.

β. αν $u_\nu < a$, επειδή $u_\nu > 0$ $\forall \nu \in N$ και η $g(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0,\infty)$ έχουμε $g(u_\nu) > g(a) = \alpha$. Δηλ. οι $u_\nu - \alpha$, $u_{\nu+1} - \alpha$ έχουν αντίθετο πρόσημο. Δηλ. η u_ν είναι ακολουθία, που πλησιάζει το α, με τιμές εκατέρωθεν αυτού.

γ. $|g'(x)| = \left|-\frac{1}{4x}\right| = \frac{1}{4x}$ Επειδή $3 \le x \le 4$

$$\frac{1}{4} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{16} \le \frac{1}{4x} \le \frac{1}{12}$$

Τελικά $|g'(x)| \le \frac{1}{12}$.

δ. Εφαρμόζω το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[u_\nu, u_{\nu+1}]$ υποδιάστημα του $[3,4]$.

$$\left|\frac{g(u_{\nu+1}) - g(u_\nu)}{u_{\nu+1} - u_\nu}\right| = |g'(x)| \le \frac{1}{12} \Rightarrow |u_{\nu+2} - u_{\nu+1}| \le \frac{1}{12}|u_{\nu+1} - u_\nu|$$

Εφαρμόζω τη σχέση αυτή διαδοχικά:

$$|u_{\nu+1} - u_\nu| \le \frac{1}{12}|u_\nu - u_{\nu-1}|$$

$$|u_\nu - u_{\nu-1}| \le \frac{1}{12}|u_{\nu-1} - u_{\nu-2}|$$

. . . .

$$|u_2 - u_1| \le \frac{1}{12}|u_1 - u_0|$$

Με πολ/μό: $|u_{\nu+1} - u_\nu| \le \frac{1}{12^\nu}|u_1 - u_0| \le \frac{1}{12^\nu}$.

ε. Ο υπολογισμός του α, έχει προετοιμαστεί, και αφήνεται στον αναγνώστη.

81. Εστω η συνάρτηση $\varphi(\chi)=LN\chi^2$

1. Να μελετηθή η συνάρτηση και να παρασταθεί γραφικά σε ορθ. σύστημα. Εστω (Γ) η καμπύλη της.

2. Θεωρώ την συνάρτηση $f_\alpha(\chi)=LN(\chi^2-\alpha\chi+4)$ όπου α παράμετρος και $-4\le\alpha\le4$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f_\alpha(\chi)$

β. Να βρεθούν τα όρια της $f_\alpha(\chi)$ όταν $\chi\to\pm\infty$

γ. Να μελετηθούν οι μεταβολές της $f_\alpha(\chi)$ για $-4<\alpha<4$

δ. Εΐτω $g_\alpha(\chi)=f_\alpha(\chi)-\varphi(\chi)$. Να βρεθούν τα όριά της στο άπειρο. Να μελετηθεί το πρόσημο της $g_\alpha(\chi)$.

3. α. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του 2. να κατασκευαστεί η καμπύλη C_2 της $f_\alpha(\chi)$ για α=2, πάνω στο ίδιο σύστημα με την(Γ) . Να μελετηθούν οι σχετικές θέσεις των C_2 και Γ.

β. Μελετήστε τις μεταβολές της $f_\alpha(\chi)$ για α=4 και α=-4. Κατασκευάστε την αντίστοιχη καμπύλη για α=4 , στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(BACC. D, LIMOGES)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση ορίζεται στο R^* και επειδή είναι άρτια, μελετώ τον περιορισμό της στο $(0,\infty)$, που είναι η $\varphi_1(x)=2\ln x$. Οι μεταβολές της φαίνονται στο πίνακα

x	0		1		∞
$\varphi_1(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

και η γραφική της παράσταση (Γ) στο τέλος της λύσης.

2. α. Το πεδίο ορισμού της $f_\alpha(x)$:

$$\Delta_\alpha(x)=\{x\,/\,x\in R \text{ και } x^2-\alpha x+4>0\}$$

Το τριώνυμο, έχει ορίζουσα την $\Delta=\alpha^2-16=(\alpha-4)(\alpha+4)$

Άρα αν $\alpha=-4$ το $x^2-\alpha x+4=(x+2)^2$ και $\Delta_\alpha=R-\{-2\}$

αν $\alpha=4$ το $x^2-\alpha x+4=(x-2)^2$ και $\Delta_\alpha=R-\{+2\}$

και αν $-4<\alpha<4$ το $x^2-\alpha x+4>0$ και $\Delta_\alpha=R$.

β. Επειδή $\lim_{|x|\to\infty}(x^2-ax+4)=\infty$ άρα $\lim_{|x|\to\infty} f_\alpha(x)=+\infty$

γ. Είναι $f'_\alpha(x)=\frac{2x-a}{x^2-ax+4}$. Άρα είναι αρνητική για $x<\frac{a}{2}$

και θετική για $x>\frac{a}{2}$.

Οι μεταβολές της:

x	$-\infty$		$\alpha/2$		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	↘	$\ln\frac{16-a^2}{4}$	↗	$+\infty$

δ. Η $g_\alpha(x)$ ορίζεται στο R^* όπου $g_\alpha(x)=\ln(x^2-ax+4)-\ln x^2=$
$=\ln\frac{x^2-ax+4}{x^2}=\ln\left(1-\frac{a}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$. Άρα $\lim_{|x|\to\infty} g_\alpha(x)=\ln 1=0$

<u>Πρόσημο της $g_\alpha(x)$</u>: Αυτό εξαρτάται απ το πρόσημο της διαφοράς $D=x^2-ax+4-x^2=\alpha\left(\frac{4}{\alpha}-x\right)$. Αν $\alpha=0$ $g_\alpha(x)>0$ $\forall x\in R^*$
Αν $\alpha\neq 0$ το πρόσημο της D, δίνεται απ τους δυό πίνακες

$\alpha>0$

x	$-\infty$		0		$4/\alpha$		$+\infty$
$g_\alpha(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

$\alpha<0$

x	$-\infty$		$4/\alpha$		0		$+\infty$
$g_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

3. α. $f_2(x)=\ln(x^2-2x+4)$ με απλό πίνακα μεταβολών. Είναι η καμπύλη C_2 στο σχήμα. Οι σχετικές θέσεις των δύο καμπύλων, εξαρτώνται απ το πρόσημο της $g_2(x)=f_2(x)-\varphi(x)$. Η προηγούμενη μελέτη σημείου δείχνει ότι η $g_2(x)>0$ για $x<2$ και $g_2(x)<0$ για $x>2$. Άρα η C_2 βρίσκεται "πάνω" απ τη (Γ) για $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$ κλπ.

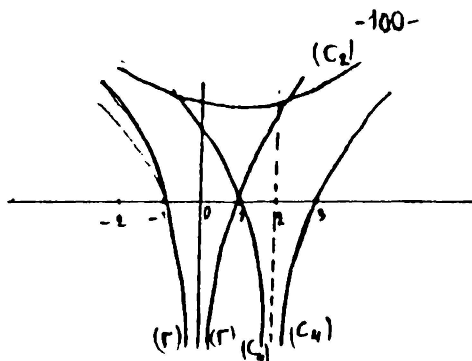
β. $f_4(x)=\ln(x-2)^2$ $f_{-4}(x)=\ln(x+2)^2$

Οι μεταβολές τους δίδονται απ τους πίνακες:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_4(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f_{-4}(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Η C_4 δίνεται στο ίδιο σχήμα στη συνέχεια.



82. Εστω η συνάρτηση $f(x)=LN(LNx)$

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση και να γίνει η γραφική της παράσταση.

2. Μπορεί να οριστεί η αντίστροφη $f^{-1}(x)$ για όλες τις τιμές του x; Να γίνει η γραφική παράσταση της αντίστροφης στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(BACC. C. DAKAR)

ΛΥΣΗ.

1. Η $f(x)$ ορίζεται όταν η $\ln x$ είναι αυστηρά θετική δηλ. όταν $x>1$. Η $f'(x)=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}>0$ άρα είναι γν. αύξουσα. Μηδενίζεται για $x=e$. Είναι $\lim_{1} f(x)=-\infty$ και $\lim_{\infty} f(x)=+\infty$. Πλάγια ασύμπτωτος δεν υπάρχει, γιατί $\lim_{\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x,y\to\infty}\frac{\ln y}{y}\cdot\frac{\ln x}{x}=0.$

Τελικα είναι μια παραβολή (C).

2. Οταν $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f(x)\in(-\infty,\infty)$. Άρα για οποιαδήποτε πραγματική τιμή u, υπάρχει μοναδικό x, ώστε $u=\ln(\ln x)$ ή $e^{u}=\ln x$ ή $x=e^{e^{u}}$. Δηλαδή $f^{-1}(x)=e^{e^{x}}$. Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική της (C) ως προς τη πρώτη διχοτόμο.

83 Αν $\psi \in R$ θέτω $\chi=\frac{1-e^{\psi}}{1+e^{\psi}}$

1. Να εκφρασεί ο ψ συναρτήσει του χ: έστω $f(\chi)$ η έκφραση που προκύπτει. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(\chi)$.

2. Να λυθεί στο R η εξίσωση $f(\chi)=-1/2$ όπου χ, είναι ο άγνωστος.

(BACC/ B. NICE)

ΛΥΣΗ.

1. Αν $x\neq-1$ έχω $(x+1)e^{y}=1-x \Leftrightarrow e^{y}=\frac{1-x}{1+x}$ και για $(x+1)(1-x)>0$ έχω $y=f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ δίνεται απ την $(1-x)(1+x)>0$ δηλ. $D=(-1,1)$.

2. Έχω $\left.\begin{array}{l} y=\ln\frac{1-x}{1+x} \\ x\in(-1,1)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1-e^{y}}{1+e^{y}} \\ y\in(-\infty,\infty)\end{array}$

Έχουμε λοιπόν $f(x)=y=-\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν

$$x=\frac{1-e^{-1/2}}{1+e^{-1/2}}=\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}+1}\simeq 0,24$$

---

84. Να λυθεί η εξίσωση: **α.** $\lambda o\gamma(\chi-12)-\lambda o\gamma(\chi-6)=\lambda o\gamma\chi$

β. $\lambda o\gamma(12-\chi)-\lambda o\gamma(6-\chi)=\lambda o\gamma\chi$

γ. $\lambda o\gamma|\chi-12|-\lambda o\gamma|\chi-6|=\lambda o\gamma\chi$

(BACC. BESANÇON)

ΛΥΣΗ.

α. Η εξίσωση ορίζεται στο $(12, \infty)$ στο οποίο μετασχηματίζεται: $x-12 = x(x-6)$ ή $x^2-7x+12=0$ με $x=3$, $x=4$. λύσεις δεν ανήκουν στο $(12, \infty)$, άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

β. λυτή ορίζεται στο $(0,6)$ άρα έχει σύνολο λύσεων το $S=\{3,4\}$.

γ. λυτή ισοδυναμεί με τα εξής τρία συστήματα:

I. $\begin{cases} 0<x<6 \\ \log(12-x)-\log(6-x)=\log x \end{cases}$ με $S=\{3,4\}$

II $\begin{cases} 6<x<12 \\ \log(12-x)-\log(x-6)=\log x \end{cases}$ ή $\left.\begin{matrix} 6<x<12 \\ x^2-5x-12=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow S=\left\{\frac{5+\sqrt{73}}{2}\right\}$

III $\begin{cases} x>12 \\ \log(x-12)-\log(x-6)=\log x \end{cases}$ ή $\left.\begin{matrix} x>12 \\ x^2-5x+12=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow S=\emptyset.$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση FoG που ορίζεται στο $R-\{-1,1\}$. Είναι άρτια ή περιττή ; Να απλοποιηθεί ο τύπος της. Να βρεθούν τα όριά της στα και Να χαραχτεί η καμπύλη της.

(BACC. C MONTPELLIER 1984)

---

92. 1. Να δειχτεί ότι $\chi \in R$ και $\chi > 0$ ισχύει:

$$\chi-\chi^2/2 \leq \ell n(1+\chi) \leq \chi$$

2. Να προσδιορίσετε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με γενικό όρο:

$$\alpha_\nu=(1+1/\nu^2)(1+2/\nu^2)\ldots(1+(\nu-1)/\nu^2)(1+\nu/\nu^2)$$

(Ισχύει ότι: $1^2+2^2+3^2+\ldots\nu^2=\nu(\nu+1)(2\nu+1)/6$

(BACC. C. LA REUNION 1984)

---

93. 1. Εστω η συνάρτηση $F(\chi)=\chi-\ell n\left|1+\frac{1}{\chi}\right|$

Να μελετηθούν οι μεταβολές της και να χαραχτεί η καμπύλη της, C. Δείξτε ότι η C, έχει μια πλάγια ασύμπτωτη και ένα κέντρο συμμετρίας, I.

2. Υπολογίστε το εμβαδόν $A(\alpha)$, του μέρους του επιπέδου, που περιέχεται στην καμπύλη C, στην ευθεία Δ (ασύμπτωτη) και στις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=\alpha$ όπου α: $0\leq\alpha\leq1$ (Ολοκλήρωση κατά παράγοντας)

Να μελετηθεί το $\lim_{\alpha\to 0^+} A(\alpha)$

(BACC. C DAKAR 1984)

94. Δίνεται η συνάρτηση:

$x<0 \quad F(x)=-e^{x}+x+1$

$x=0 \quad F(0)=0$

$x>0 \quad F(x)=x^2 \cdot \ell n x$

1. Να δειχτεί ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.

2. Ονομάζουμε C την γραφική της παράσταση. Δείξτε ότι η ευθεία $\psi=x+1$ είναι μια ασύμπτωτη της C. Κατασκευάστε την C.

3. Δίνεται $0<\eta<1$. Να υπολογίστε συναρτήσει του η το $I(\eta)=\int_{\eta}^{1} F(x)dx$. Ομοίως το $\lim_{\eta \to 0^+} I(\eta)$

(BACC E. POITIERS 1983)

---

95. Δίνεται η οικογένεια συναρτήσεων:

$F_\lambda(x)= -x-1+\lambda e^{x}$ και ονομάζουμε C_λ τις καμπύλες της οικογένειας.

1.α. Να δειχτεί ότι όλες οι καμπύλες C_λ έχουν την ίδια πλάγια ασύμπτωτο Δ, όταν $x \to -\infty$

β. Να βρεθεί το όριο των F_λ όταν $x \to +\infty$

γ. Να μελετηθούν οι μεταβολές των F_λ, και οι σχετικές θέσεις των C_λ.

2. Εστω $\alpha \in R$. Αν ονομάσουμε M_λ το σημείο της C_λ με τετμημένη α, να υπολογιστεί η τετμημένη του σημείου Ν, που είναι η τομή της ευθείας Δ, και της εφαπτομένης T_λ, στο M_λ της C_λ. Να διαπιστώστε ότι οι ευθείες T_λ $(\lambda \in R^*)$, περνούν όλες απ'το ίδιο σημείο.

(BACC. E. STRASBOURG 1983)

96. A. Εστω $F(\chi)=\chi-1-\ell n|\chi|$ και σημειώνουμε με F_0 και F_1 τους περιορισμούς της F, πάνω στα R^*_+ και R^*_- αντίστοιχα. Επίσης έστω γ, γ_0 και γ οι αντίστοιχες καμπύλες τους.

I.α. Για κάθε κ, θεωρούμε την ευθεία D_κ με εξίσωση $\psi=\chi+\kappa$.
Δείξτε ότι η D_κ τέμνει την γ σε δυό σημεία με αντίθετες τετμημένες. Οι γ και γ_0 συμμετρικές (δείξτε).

β. Θεωρούμε δυό σημεία P και Q πάνω στη γ με τετμημένες χ και $1/\chi$ αντίστοιχα και I το μέσο τους. Να δειχτεί ότι το I, βρίσκεται πάνω σε μιά ευθεία D_κ, η οποία να προσδιοριστεί.

γ. Μελετήστε και χαράξτε τη γ.

B. Εστω τώρα η

$$G(\chi)=-\frac{\chi\ell n|\chi|}{\chi-1} \quad \chi\neq 0,1$$
$$G(0)=0$$
$$G(1)=1$$

I. Είναι συνεχής στο 0; Στο 1;

2.α. Είναι παραγωγίσιμη στο 0;

β. Είναι παραγωγίσιμη στο 1;

γ. Με τη βοήθεια του προσήμου της F (A μέρος) να μελετήστε τις μεταβολές της G.

3. α. Εστω C, η καμπύλη της G, και E το σημείο της, με τετμημένη -1. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο E.

β. Κατασκευάστε την C.

(BACC C. ASIE ET SUD AUSTRALIE)

97. Δίνεται η $G(\chi)=|\chi|^{\frac{1}{\chi}}$ $\chi\neq 0$
$G(0)=0$

1. Να μελετηθούν

α. Η συνέχεια από αριστερά στο σημείο 0.

β. Η παραγωγισιμότης από δεξιά στο 0.

γ. Η συνέχεια και η παραγωγισιμότης στο 0.

2. Συμβολίζουμε με C την καμπύλη της G.

α. Μελετήστε τις μεταβολές της G.

β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής της C και της ευθείας $\psi=1$

γ. Να βρεθούν οι συντελεστές διευθύνσεως των εφαπτομένων της C, στα προηγούμενα σημεία.

δ. Χαράξτε την C.

(BACC E. AMERIQUE DU SUD 1984)

----

98. Θεωρούμε την $F(\chi)=2\chi-\chi\ell n\chi$ για $\chi>0$
$F(0)=0$

1. Είναι συνεχής στο 0; Παραγωγίσιμη;
2. Να παρασταθεί γραφικά.

(GROUPE I 1984)

----

99. Έστω η $G(\chi)=\frac{\chi}{\chi+1}-\ell n(\chi+1)$ με Π.Ο. $(-1,\infty)$

1. Δείξτε ότι $G(\chi)<0$ $\forall\chi>-1$
2. Η $F(\chi)=\frac{\ell n(1+\chi)}{\chi}$ $\chi\neq 0$, $F(0)=1$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0; Να παρασταθεί γραφικά.

(BACC. C. GUYANE 1984)

100. Εστω η συνάρτηση $F(\chi)=\frac{e^{\chi}-1}{\chi}$ $\chi\neq 0$
$F(0)=1$

Α. 1. Να δειχτεί ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0. Να βρεθεί το $F'(0)$

2. Θεωρώ την $G(\chi)=\chi e^{\chi}-e^{\chi}+1$. Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να εξαχθεί το πρόσημό της για όλα τα πραγματικά χ.

3. Ομοίως να μελετηθούν οι μεταβολές της F. Να χαραχτεί η καμπύλη της, έστω η C_F

Β. Ορίζουμε την ακολουθία (α_ν):
$\alpha_0=0,5$
$\alpha_{\nu+1}=F(\alpha_\nu)$

1. σημειώστε πάνω στο επίπεδο τα σημεία $M_1(\alpha_0,\alpha_1)$ $M_2(\alpha_1,\alpha_2)$ και $M_3(\alpha_2,\alpha_3)$. Τι συμβαίνει;

2. Εστω η $V(\chi)=e^{\chi}-\chi^2-1$

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της V' στο $[0,\infty)$

β. Να δειχτεί ότι η F είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$ Επίσης είναι $V(\chi)\geq 0$ στο ίδιο διάστημα.

3. Να δειχτεί ότι $\forall\nu\in N$ $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\frac{V(\alpha_\nu)}{\alpha_\nu}$. Να εξαχθεί ότι η (α_ν) είναι αύξουσα.

4. Υποθέτουμε ότι η (α_ν) συγκλίνει στο λ, $\lambda\neq 0$. Χρησιμοποιώντας την (1), δείξτε : $V(\lambda)=0$ Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

Γ. Θέτουμε $B(\chi)=e^{\chi}-(1+\frac{\chi}{1!}+\frac{\chi^2}{2!}+\frac{\chi^3}{3!}+\frac{\chi^4}{4!})$. Εστω $B_1=B'$ $B_2=B_1'$ $B_3=B_2'$ $B_4=B_3'$

1. Εκφράστε τα B_i για $\chi\in R$ $(i=1,2,3,4)$

2. Μελετήστε το πρόσημο του B_4 για $\chi\in(-\infty,0]$ Διαδοχικά μελετήστε τις μεταβολές των B_3,B_2,B_1,B στο ίδιο διάστημα.

3. Δείξτε: $1+\frac{\chi}{2!}+\frac{\chi^2}{3!}+\frac{\chi^3}{4!}\leq F(\chi)\leq 1+\frac{\chi}{2!}+\frac{\chi^2}{3!}$

(Bacc. E ROUEN 1984)

101. Εστω η F, που ορίζεται:

$\chi \epsilon (-\infty, 0)$　$F(\chi) = \frac{e^{\chi}-1}{\chi}$

$\chi \epsilon [0, 1]$　$F(\chi) = \sigma\upsilon\nu^{2}\pi\chi$

$\chi \epsilon (1, \infty)$　$F(\chi) = 1 + \frac{\ln \chi}{\chi}$

1. Να μελετηθεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότης της F στο R.
2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e F(x)dx$ αφού προηγουμένως αποδειχτεί η ύπαρξη αυτού.

(BACC E/ POITIERS 1984)

---

102. Εστω η $F(\chi) = 3(e^{-2\chi} - e^{-3\chi})$

1. Πίνακας μεταβολών της.
2. Εστω C η καμπύλη της.

α. Χαράξτε τη C

β. Υπολογίστε το εμβαδόν $E(\mu)$ $\mu > 0$, που ορίζεται στο επίπεδο: $0 \leq \chi \leq \mu$
$0 \leq \psi \leq F(\chi)$

γ. Υπολογίστε το όριο του $E(\mu)$, όταν $\mu \to \infty$

3. Εστω η $G(\chi)$ περιορισμός της $F(\chi)$ στο διάστημα $I = [3/2, +\infty)$. Να δειχτεί ότι η $G(\chi)$ είναι "1-1 και επί" του I, σ' ένα διάστημα J, που να προσδιοριστεί. Να εξάγετε ότι υπάρχει μια μοναδική τιμή α, του I, έτσι ώστε $G(\alpha) = 1/3$

(SERIE C TOULOUSE 1985)

Αρα η $f(x)=1$ ισχύει μόνον όταν $x=-\sqrt{2}$

3. Στο $(-\infty,0]$ έχω $x^2-1=\mu \Leftrightarrow x^2=\mu+1$

αν $\mu<-1$ δεν υπάρχει λύση

αν $\mu \geq -1$ έχουμε $x=-\sqrt{\mu+1}$

Στο $(0,\infty)$: $\frac{x+1}{x}=\mu \Leftrightarrow (\mu-1)x=1$

Αν $\mu \leq 1$ δεν υπάρχει λύση

αν $\mu>1$ έχουμε $x=\frac{1}{\mu-1}$

Αρα τελικά: Αν $\mu<-1$ δεν υπάρχει λύση

αν $-1\leq\mu\leq 1$ μία λύση $x=-\sqrt{\mu+1}$

αν $\mu>1$ δύο λύσεις : $x=-\sqrt{\mu+1}$ $x=\frac{1}{\mu-1}$

4. Δεν είναι 1-1, γιατί απ'την προηγούμενη μελέτη κάθε στοιχείο του διαστήματος $(1+\infty)$, είναι εικόνα δύο στοιχείων του A της f $(A=R)$.

5. Εστω $a>0$ $f(a)=\frac{a+1}{a}$

Θέτουμε $-a=\beta \Rightarrow f(\beta)=a^2-1$

έτσι $f(a)=f(\beta)$ αν και μόνο άν $\frac{a+1}{a}=a^2-1$

Αφού $a>0 \Rightarrow a+1\neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $\frac{1}{a}=a-1$ ή $a^2-a-1=0$ με $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(a>0)$

Αρα μια μοναδική τιμή του μ υπάρχει:

$\mu=a^2-1=a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

14.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $g(x)=\frac{1}{1+x|x|}$ $x\in R$

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και έπειτα να λυθεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$
2. Να λυθεί η ανισότης $g(x)>f(x)$
3. Να δειχτεί ότι η $f(x)$ είναι αυστηρώς φθίνουσα στο διάστημα R_+. Τί είδους μονοτονία έχει στο R_-;
4. Να εξεταστεί η μονοτονία της $g(x)$.

(Classes de premiere A,B,C)

ΛΥΣΗ

1. $D_f=R$ εξ'άλλου $\forall x\in R_+$ $|x|=x$ άρα

$\forall x\in R_+,\ f(x)=g(x)$ (1)

Επίσης $\forall x\in R_-$ $|x|=-x$ και $x|x|+1=1-x^2$, άρα η g δεν ορίζεται για $x=-1$ $D_g=R-\{-1\}$

Η $f(x)=g(x)$: Απ'τη σχέση (1) προκύπτει ότι το R_+ περιέχεται στο σύνολο των λύσεών της.

Για να υπάρχουν λύσεις αυστηρά αρνητικές πρέπει

$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-x^2}\Rightarrow 1+x^2=1-x^2\Rightarrow 2x^2=0$ που δεν δίνει αρνητικές λύσεις.

Αρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι στο R_+.

2. Η ανισότης $g(x)>f(x)$: Απ'τα προηγούμενα προκύπτει ότι δεν υπάρχει καμμιά θετική λύση της ανισότητας.

Για $x<0$ και $x\neq -1$ έχω

$$g(x)-f(x)=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}$$

Αυτή η διαφορά είναι θετική όταν και μόνο όταν $1-x^2>0$ και $x\neq 0$.
Αρα το ζητούμενο σύνολο λύσεων της ανισότητας $g(x)>f(x)$ είναι το διάστημα $(-1,0)$.

3. Αν $(\alpha,\beta)\subset R$ έχουμε $f(\alpha)-f(\beta)=\frac{1}{\alpha^2+1}-\frac{1}{1+\beta^2}=$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \text{ άρα } \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{-(\alpha+\beta)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}$$

Αν $(\alpha,\beta)\subset R_+$ η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα
Αν $(\alpha,\beta)\subset R_-$ η $f(x)$ γνησίως αύξουσα.

4. Απ'τη σχέση (1) προκύπτει ότι η g είναι αυστηρά φθίνουσα στο R_+

Εστω $\alpha,\beta \in R_- - \{-1\}$. Εχουμε $g(\alpha)-g(\beta)=\frac{\alpha^2-\beta^2}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$

δηλ. $$\frac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha+\beta}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} \quad (2)$$

Αν τα $\alpha,\beta \in (-1,0]$ έχω $\alpha+\beta<0$, $1-\alpha^2>0$ $1-\beta^2>0$ άρα ο λόγος μεταβολής είναι αρνητικός και η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$ ένωση των δύο προηγούμενων διαστημάτων.

Θα εξετάσουμε το πρόσημο του λόγου μεταβολής (2) στο $(-\infty,-1)$. Για $\forall \alpha,\beta \in(-\infty,-1) \Rightarrow \alpha+\beta<0$ $1-\alpha^2<0$ $1-\beta^2<0$ άρα $\frac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta}<0$

Δηλ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$
Τελικά είναι γν.φθίνουσα σε κάθε ένα απ'τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,+\infty)$.

Η απόδειξη για τη μονοτονία της $g(x)$ στο $(-1,+\infty)=(-1,0]\cup(0,+\infty)$.

- Έστω $(\alpha,\beta)\subset(-1,+\infty)$

  αν $(\alpha,\beta)\subset R_+$ τότε $\frac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta}<0$ ως γνωστό.

  αν $(\alpha,\beta)\subset(-1,0]$ ομοίως

  αν $\alpha>0$ και $\beta<0$, έχουμε $\alpha>\beta$, $g(\alpha)<g(0)$ αφού η g είναι γν. φθίνουσα στο R_+ και $g(0)<g(\beta)$ αφού η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-1,0]$. Με τη μεταβατικότητα των σχέσεων διάταξης έχουμε $g(\alpha)<g(\beta)\Rightarrow\frac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta}<0$ ο.ε.δ.

15.

Θεωρούμε την ομογραφική συνάρτηση $y=\frac{\mu x-1}{x-\mu}$ που παρίσταται γραφικά απ'την καμπύλη $(H\mu)$.

1. Για ποιές τιμές του μ, η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Να παρασταθεί γραφικά η $(H\mu)$ για $\mu=2$. Τι συμβαίνει για $|\mu|=1$;

2. Δείξτε ότι οι $(H\mu)$ για $|\mu|\neq1$ περνούν από δύο σταθερά σημεία Α και Β των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες. Τι συμβαίνει για $|\mu|=1$;

3. Να δειχτεί ότι οι δύο καμπύλες $(H\mu)$ που αντιστοι-

χούν σε δύο αντίθετες τιμές του μ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και να βρεθεί ο γ. τόπος των κέντρων συμμετρίας των (Ημ) για τα διάφορα μ.

4. Πως πρέπει να ορίσουμε το μ ώστε η (Ημ) να περνάει από το σημείο Ι(α,β); Να διερευνηθεί η θέση του Ι πάνω στο επίπεδο.

5. Η (Ημ) τέμνει τον Οχ στο Μ και τον Οy στο Ν. Πως μετακινείται η ευθεία ΜΝ, όταν το Μ μεταβάλλεται; Να γράψετε την εξίσωση της.

(Bacc. 1ere partie, Dakar)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=\mu$. Εστω x_0 και x_1 δύο τιμές της μεταβλητής μικρότερες και οι δύο ή μεγαλύτερες απ'το μ, και y_0, y_1 οι αντίστοιχες τιμές της y

$$\text{Τότε } y_1 - y_0 = \frac{\mu x_1 - 1}{x_1 - \mu} - \frac{\mu x_0 - 1}{x_0 - \mu} \Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1-\mu^2}{(x_1-\mu)(x_0-\mu)}$$

Ο παρανομαστής είναι θετικός άρα συνάρτηση είναι φθίνουσα αν και $\mu < -1$ ή $\mu > +1$. Ομοίως αύξουσα αν $-1 < \mu < +1$.

Για $\mu=2$ η (H_2) είναι η γνωστή υπερβολή.

Για $\mu=-1$ $y = \frac{-x-1}{x+1} = -1$ και δεν ορίζεται για $x=-1$

Για $\mu=1$ $y=1$, δεν ορίζεται για $x=1$.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι αντίστοιχες καμπύλες είναι

ευθείες.

2. Οι συντεταγμένες (x, y) ενός τυχόντος σημείου της (Hμ) πληρούν τη σχέση $\mu(x+y)=xy+1$ (1). Η σχέση αυτή πληρείται από οποιοδήποτε μ αν $x+y=0$ και $xy+1=0$ δηλαδή $x=-y$ και $x^2=1$. Αρα οι (Hμ) για τυχούσα τιμή του μ, περνούν απ'τα σημεία A(1,-1). και B(-1,1)

3. Εστω M(x, y) σημείο ητς (Hμ). Οι συνεταγμένες πληρούν τη σχέση (1) η οποία μπορεί να γραφεί και $(-\mu)(-x-y)=(-x)(-y)+1$. Αυτή η σχέση δείχνει ότι το M'(-x,-y) συμμετρικό του M, ως προς την αρχή O, βρίσκεται πάνω στη καμπύλη (H-μ). Αρα οι (Hμ) και (H-μ) είναι συμμετρικές ως προς την αρχή.

4. Οι τιμές του μ, που καθορίζουν τις καμπύλες δίνονται απ'την εξίσωση $\mu(\alpha+\beta)=\alpha\beta+1$ (2)
Αν $\alpha+\beta\neq0$ δηλ. αν το I δεν βρίσκεται πάνω στην AB, η (2) έχει μία λύση δηλ. μία μόνο καμπύλη (Hμ) περνάει από το I. Η αντίσοιχη τιμή του μ είναι $\mu=\frac{\alpha\beta+1}{\theta+\beta}$. Αν $\alpha+\beta=0$ και $\alpha\beta+1\neq0$ δηλ. αν το I βρίσκεται πάνω στη AB και είναι διάφορο των A και B η εξίσωση (2) είναι αδύνατη και καμμιά καμπύλη (Hμ) δεν περνάει απ το I. Αν $\alpha+\beta=0$ και $\alpha\beta+1=0$ δηλ. αν το I είναι στο A ή στο B, η εξίσωση (2) είναι αόριστη και όλες οι καμπύλες (Hμ) περνούν απ'το I, πράγμα το οποίο βρήκαμε στο ερώτημα 2.

5. Το M έχει τετμημένη $x=\frac{1}{\mu}$. Το N έχει τεταγμένη $y=\frac{1}{\mu}$. Η ευθεία MN λοιπόν είναι σταθερά παράλληλη στη δεύτερη διχοτόμο των αξόνων. Ο συντελεστής της κατευθύνσεως είναι -1 και έχει εξίσωση $y=-x+\frac{1}{\mu}$

Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων που ορίζονται στο $[-1,1]$ απ τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} t_{\nu+1}(x)+t_{\nu-1}(x)=2x.t_{\nu}(x) \\ t_0(x)=1 \\ t_1(x)=x \end{array}\right\}$$

1. Να δείξετε ότι η $t_\nu(x)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμούκαι και υπολογίσετε τον συντελεστή του μεγιστοβαθμίου του όρου.

2. Να δέιξετε ότι για $p\in N$ η t_{2p} είναι άρτια συνάρτηση και η t_{2p+1} περιττή.

3. Για $0\leq\theta\leq\pi$ θέτοντας $x=\varphi(\theta)$ με $\varphi(\theta)=$συνθ, να δειχτεί ότι η σύνθεση $(t_\nu o\varphi)(\theta)=($συν$(\nu\theta))$

(Baccalauréat Maroc)

Λ Υ Σ Η

1. Απ'τη υπόθεση οι $t_0(x)$ και $t_1(x)$ είναι πολυώνυμα 0, και πρώτου βαθμού αντίστοιχα. Ο αναγωγικός τύπος δίνει: $t_2(x)=2xt_1(x)-t_0(x)=2x^2-1$ δηλ. η $t_2(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Υποθέτουμε ότι η $t_\nu(x)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού καθώς και η $t_{\nu-1}(x)$είναι ν-1 βαθμού.
Τότε: $t_{\nu+1}(x)=2xt_\nu(x)-t_{\nu-1}(x)$ (1) δηλ. βαθμού ν+1

2. Η $t_1(x)$ είναι περιττή, η $t_2(x)$ άρτια.
Υποθέτουμε πως η $t_\nu(x)$, έχει την ίδια parity (είναι άρτια ή περιττή)με το μονώνυμό της που έχει το μεγαλύτερο βαθμό.

Τότε το πολυώνυμο $2xt_v(x)$ έχει διαφορετική parity απ το $t_v(x)$. Εχει λοιπόν την ίδια parity με το $t_{v-1}(x)$. Αρα απ'την (1) το $t_{v+1}(x)$ έχει ίδια parity με το $t_{v-1}(x)$.

Αρα οι συναρτήσεις $t_{2\rho}(x)$ είναι άρτιες και οι $t_{2\rho+1}(x)$ περιττές.

3. $(t_1 o\varphi)(\theta)=$συνθ. Απ'τον αναδρομικό τύπο έχουμε

$(t_2 o\varphi)(\theta)+1=2$συνθ$.(t_1 o\varphi)(\theta)=2$συνθ.συνθ$=$συν$2\theta+1$

$(t_2 o\varphi)(\theta)=$συν2θ. Ο τύπος ισχύει για $v=1, v=2$

Έστω ότι ισχύει για $v=v$ δηλ. $(t_v o\varphi)(\theta)=$συν $v\theta$

Απ'τον αναδρομικό τύπο έχω:

$(t_{v+1} o\varphi)(\theta)+(t_{v-1} o\varphi)(\theta)=2$συνθ$[t_v o\varphi](\theta)=$

$=2$συνθ συν$v\theta=$συν$(v+1)\theta+$συν$(v-1)\theta$.

Επειδή δε έχουμε $(t_{v-1} o\varphi)(\theta)=$συν$(v-1)\theta$ έχουμε τελικά

$(t_{v+1} o\varphi)(\theta)=$συν$(v+1)\theta$. Αρα ο τύπος ισχύει $\forall v\in N$.

17.

Έστω η $f:R\to R$ που δίνεται απ'το τύπο $f(x)=x+1+\left|\frac{x}{2}-1\right|$

Να χαραχτεί η καμπύλη που παριστάνει την $f(x)$ σε ορθ. σύστημα αξόνων. Με τη βοήθεια αυτής να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\mu$ με άγνωστο το x. Να εξηγείτε γιατί η f είναι 1-1, και να αποδείξτε ότι η ανάστροφή της είναι η $g(x)=\frac{4}{3}x-2-2\left|1-\frac{x}{3}\right|$. Να χαράξτε την καμπύλη της $g(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Classes de premiere C, D, et E)

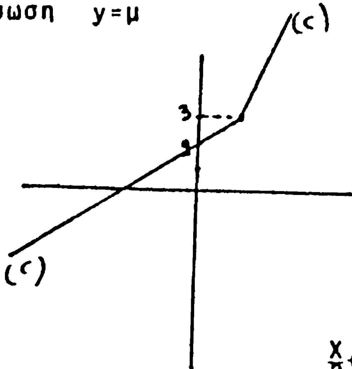
ΛΥΣΗ

Μετά την εξαγωγή του απόλυτου, η $f(x)$ γράφεται

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x}{2} & x\geq 2\\ \frac{x}{2}+2 & x<2\end{cases}$$

Το κοινό σημείο των δύο κλάδων είναι το Α(2,3)

Η λύση της $f(x)=\mu$, ισοδυναμεί με τη μελέτη της τομής της καμπύλης (C) της $f(x)$ με την ευθεία ($D\mu$) με εξίσωση $y=\mu$



Αν $\mu=3$ έχουμε $x=2$ αφού το μόνο σημείο της (C) με τετμημένη 3 είναι το Α. Αν $\mu<3$ η ($D\mu$) τέμνει τη (C) σ'ένα σημείο της ευθείας με εξίσωση $y=\frac{x}{2}+2$. Αρα η δοθείσα γράφεται:

$\frac{x}{2}+2=\mu \Rightarrow x=2(\mu-2)$. Αν $\mu>3$ η εξίσωση ομοίως γράφεται $\frac{3}{2}x=\mu \Leftrightarrow x=\frac{2\mu}{3}$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου μ λοιπόν, η $f(x)=\mu$ έχει μία μοναδική λύση. Δηλ. η f είναι 1-1.

Αρα για κάθε μ, ο αριθμός $g(\mu)$ είναι λύση της $f(x)=\mu$

Αν λοιπόν $\mu\leq 3 \Rightarrow 1-\frac{\mu}{3}\geq 0$ ή $\left|1-\frac{\mu}{3}\right|=1-\frac{\mu}{3}$ και

$$g(\mu)=\frac{4\mu}{3}2-2\left(1-\frac{\mu}{3}\right)=2(\mu-2)$$

Ομοίως αποδεικνύεται αν $\mu>3$.

Τέλος η γραφική παράσταση της g είναι η ένωση δύο ημιευθειών με αρχή το Β(3,2). Η μία είναι $x\leq 3$ και $y=2(x-2)$

και η άλλη $x \geq 3$ και $y = \frac{2x}{3}$.
Αυτή είναι συμμετρική της παράστασης της $f(x)$ ως προς τη πρώτη διχοτόμο, αφού οι συναρτήσεις είναι αντίστροφες.

18.

'Εστω η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο
$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$$

1. Μελετήστε την εξίσωση $f(x)=\mu$ ($\mu \in R$)
2. Η απεικόνιση είναι 1-1; Είναι "επί";
3. Ποιό είναιτο πεδίο τιμών;

(Classes de première C,D,E)

Λ Υ Σ Η

1. Η $f(x)=\mu$ γράφεται $\frac{2x+1}{x^2+1}=\mu$ $\mu x^2-2x+\mu-1=0$ (1).
   Για $\mu \neq 0$ είναι δευτεροβάθμια με
   $\Delta' = 1-\mu(\mu-1) = -\mu^2+\mu+1$, με ρίζες της Δ' τις $\mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
   Άρα για $\mu < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ η $\mu > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ η $\Delta' < 0$ και η (1) δεν έχει λύση.
   Για $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \mu < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ η (1) δέχεται 2 ρίζες
   Για $\mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ η (1) δέχεται διπλή ρίζα.
2. 'Ετσι λοιπόν η συνάρτηση f_1, δεν είναι 1-1 αφού

για ωρισμένες τιμές του μ , η f(x)=μ δέχεται δύο ρίζες.Ετσι οι αριθμοί μ, είναι εικόνες δύο στοιχείων του R μέσω της f , πράγμα που αποκλείει το 1-1.

Επίσης δεν είναι η f επί, αφού για ωρισμένα μ, η f(x)=μ δέν έχει λύση.Τα μ αυτά λοιπόν δεν είναι εικόνες κανενός στοιχείου του R μέσω της f

3. Το πεδίο τιμών, είναι το σύνολο των τιμών του μ, για τα οποία η f(x)=μ έχει τουλάχιστον μία λύση. Αρα $f(R)=\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίδεται η $y=x(4-x)$

1. Να παρασταθεί γραφικά (C)
2. Μια ευθεία με κλίση 1 και τεταγμένη επί την αρχή μ, τέμνει την καμπύλη (C) σε δύο σημεία τα M και N, ενώ η παράμετρος μ, είναι μικρότερη από μια τιμή μ_0, η οποία να προσδιοριστεί.
3. Ποιός είναι ο γεωμ. τόπος του μέσου I του MN όταν το μ μεταβάλλεται;
4. Εκφράστε το τετράγωνο της απόστασης MN συναρτήσει του μ.
5. Να προσδιοριστεί το μ, ώστε η απόσταση του I και της κορυφής S της καμπύλης (C) ισούται με το μισό του MN.

(Bacc. 1ere partie, series cl.A'Montreal)

---

2. Έστω (P) και (P') οι καμπύλες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$y_1=(x+\mu-3)^2-4$ και $y_2=(x+2\mu)^2-4$ αντίστοιχα.

1. Να κατασκευαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι καμπύλες (P_0) και (P_0') που αντιστοιχούν στην τιμή μ=0.

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο αυτών καμπύλων.

Να δειχτεί ότι οι (P_0) και (P_0') είναι συμμετρικές ως προς άξονα, παράλληλου του Oy

2. Ποιός είναι ο γ. τόπος των κορυφών των καμπύλων (P) και (P') όταν το μ μεταβάλλεται;

Να υπολογιστούν συναρτήσει του μ, οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των καμπύλων (P) και (P')
Για ποιά τιμή του μ, οι δύο καμπύλες ταυτίζονται;

(Bacc. 1re partie, serie tech. A,Alger)

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

1. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$ 2. $y=\sqrt{x-4x+3}$ 3. $y=\sqrt{1-|x|}$

4. $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ 5. $y=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$ 6. $y=\frac{1}{\log(1-x)}+\sqrt{x+2}$

Απάντηση
1. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ 2. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$
3. $[-1,1]$ 4. $(-\infty,0)$
5. $[1,4]$ 6. $[-2,0)\cup(0,1)$

---

4. 1. Να δειχτεί ότι $f(x)+f(-x)$ είναι άρτια συνάρτηση ενώ η $f(x)-f(-x)$ είναι περιττή
2. Να γράψτε τις παρακάτω συναρτήσεις σαν άθροισμα άρτιας και περιττής συνάρτησης:
α. $y=a^x$ β. $y=(1+x)^{100}$

---

5. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφημάτων των
$y=|\lambda-\lambda x|$ και $y=\big||\lambda|-|\lambda x|\big|$

6. Δίνεται η ομογραφική $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma^x+\delta}$

1. Να ορισθούν τα α, β, γ, δ ώστε η υπ'αυτής οριζόμενη καμπύλη, να περνάει απ'το Α(2,3) και να τέμνει τον Οx σε σημείο με τετμημένη -1, και τον Οy σε σημείο με τεταγμένη -1.

2. Με τις τιμές που βρέθηκαν να χαραχτεί η καμπύλη (C)της συνάρτησης.

3. Απ'την αρχή Ο, περνάει ευθεία μεταβλητή. Να βρεθεί το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με την (C). Όταν υπάρχουν δύο κοινά σημεία M_1 M_2 να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του μέσου P του τμήματος M_1 M_2. Ποιό ειναι το σύνολο αυτών των σημείων;

4. Να βρεθούν τα κοινά σημεία του προηγούμενου γεωμ. τόπου και της καμπύλης (C)

(Partie de Bacc. C et E, Dijon)

7. Έστω η $f: N \rightarrow R$ που δίνεται

$f(0)=5$

$f(\eta+1)=2f(\eta)$

1. Να εκφράστε το $f(\eta)$ συναρτήσει του $f(0)$
Η $f(\eta)$ έχει όριο όταν $\eta \rightarrow \infty$;
2. Υπολογίστε τα $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$
3. Να δειχτεί ότι $f(\eta).f(m)=5(\eta+m)$

(Bacc. A Maroc)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ και ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

1

Έστω η $f(x)=(x+\frac{1}{2})(x^2+x+\frac{5}{4})$

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της

β. Έστω (C) η καμπύλη που παριστά την $f(x)$

Να βρεθούν οι τεταγμένες των σημείων της (C) με αντίστοιχες τετμημένες $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

Να δοθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (Τ) της καμπύλης (C) στο σημείο Ι με τετμημένη $-\frac{1}{2}$. Να δειχτεί ότι το Ι είναι κέντρο συμμετρίας της καμπύλης (C) και να προσδιορίσετε τη θέση της (C) σε σχέση με την ευθεία (Τ) ως προς το σημείο Ι. Να χαράξετε την (C)

(Partie du bacc. B, Lille)

ΛΥΣΗ

α. Η $f(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, ορισμένη σ'όλο το R με $f'(x)=3x^2+3x+\frac{7}{4}>0$ $x\epsilon(-\infty,\infty)$. Άρα η f είναι γν. αύξουσα σ'όλο το πεδίο της ορισμού.

Είναι επίσης $f(x)=x^3(1-\frac{1}{2x})(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{4x^2})$ δηλ.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

β. $I(-\frac{1}{2},0)$ $A=(-\frac{3}{2},-2)$, $B=(\frac{1}{2},2)$. Είναι $f'(-\frac{1}{2})=$

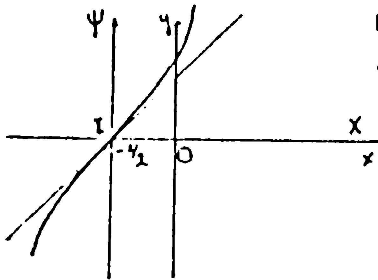
$\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}=1$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης (Τ): $y=x+\frac{1}{2}$

Με αλλαγή συστήματος αξόνων ως εξής:

$x = X - \frac{1}{2}$ η εξίσωση της (C) στο νέο σύστημα γίνεται
$y = \Psi$ $\Psi = X\left[(X-\frac{1}{2})^2 + X - \frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right]$ ή $\Psi = X(X^2+1)$ δηλ. είναι περιττή συνάρτηση και επομένως, συμμετρική η (C) ως προς την αρχή του νέου συστήματος δηλ. του I.

Στο νέο σύστημα η (T) έχει εξίσωση $\Psi = X$ άρα η θέση της (C) ως προς την (T) εξαρτάται απ'τη διαφορά $\varphi(X) - X = X(X^2+1) - X = X^3$ δηλ. η (C) είναι "κάτω" απ'την (T) για $X < 0$ και πάνω απ'την (T) για $X > 0$

(Το σημείο I είναι σημείο καμπής της C)



Η γραφική παράσταση της f(x) είναι χωρίς λεπτομέρειες η εξής:

2.

Έστω η $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να βρεθεί το σημείο καμπής. Να γίνει η γραφική παράσταση της. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x=0$

(Partie du bacc.D,Besançon).

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0\ \forall x\in R$. Άρα είναι παντού αύξουσα.

Επίσης $f(x)=1+\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1+\dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ άρα

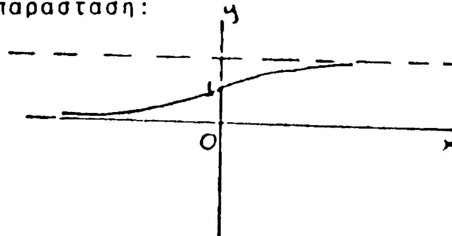
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{|x|}=\pm1$

Δηλ. έχουμε τις ασύμπτωτες $y=0$ και $y=2$

Για το σημείο καμπής βρίσκουμε τη β'παράγωγο. Είναι $f''(x)=$ $=-\dfrac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$ με ρίζα το $x=0$. Και καθώς η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x=0$, το σημείο $I(0,1)$ είναι το σημείο καμπής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $I(0,1)$ είναι: $y=x+1$

Γραφική παράσταση:



3.

Έστω η $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{x-2}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της $f(x)$

   α. Πεδίο ορισμού

   β. Όριο της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

γ. Πρόσημο της παραγώγου της.

2. <u>Γραφική παράσταση της $f(x)$.</u> Εξίσωση εφαπτομένης της, στο $x=-2$

(Bacc.A, Nantes)

Λ Υ Σ Η

1. α. Πεδίο ορισμού: $R - \{-1, 2\}$

β. Όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

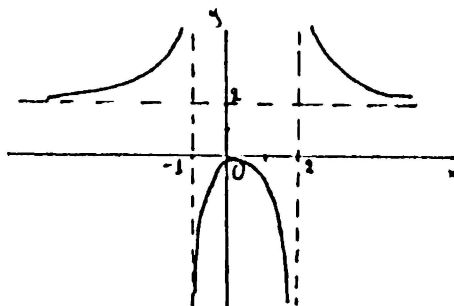
Και τελικά $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 2$

γ. Είναι $f'(x) = \dfrac{-3x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

Και έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολής της fx.

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	$5/3$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η εξής:



Ασύμπτωτες οι
$x=2, x=-1, y=2$

Εξίσωση εφαπτομένης στο
$A(-2,2)$: $y=\frac{3x}{4}+\frac{7}{2}$

4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

1. Να μελετήσετε τις μεταβολές της $f(x)$

2. α. Μέσα στο διανυσματικό χώρο Ε των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3ου, τα πολυώνυμα $1,\ x-1,\ (x-1)^2\ (x-1)^3$) αποτελούν μια βάση Β. Να αναλυθεί στη βάση αυτή το πολυώνυμο του Ε: $(x+1)^3$. Να συμπεράνετε έτσι ότι για κάθε $x\neq1$, η $f(x)$ παίρνει τη μορφή:

$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-1}+\frac{\delta}{(x-1)^2}$ όπου α, β, γ, δ να προσδιοριστούν.

β. Απ'τα προηγούμενα να συμπεράνετε ότι η καμπύλη (C) που απεικονίζει την $f(x)$, δέχεται μια ασύμπτωτη (P) όχι παράλληλη προς τους άξονες.

Να χαραχτεί η (C)

(Partie du bacc.D,Nantes)

ΛΥΣΗ

i. Πεδίο ορισμού $D=R-\{1\}$ $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$

άρα το πρόσημό της αλλάζει στο 1 και στο 5.

$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ και αν γραφεί $f(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})^3}{(1-\frac{1}{x})^2}$ έχουμε

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	27/2	↗	$+\infty$

2. Ανάλυση του πολυωνύμου $(x+1)^3$:

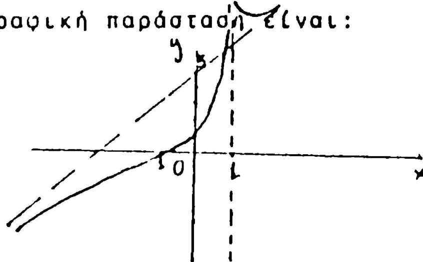
Είναι $(x+1)^3=[(x-1)+2]^3=(x-1)^3+3(x-1)^2.2+\cdots=$

$=(x-1)^3+6(x-1)^2+12(x-1)+8$. Άρα στο πεδίο ορισμού της η $f(x)=x-1+6+\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}$ άρα α=1 β=5 γ=12 δ=8

β. Απ'την προηγούμενη έκφραση έχω

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+5)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}\right]=0$ δηλ. η ευθεία

$y=x+5$ είναι ασύμπτωτη της $f(x)$, όχι παράλληλη των αξόνων. Η γραφική παράσταση είναι:



Ια μελετηθούν οι μεταβολές και να γίνει η γραφι-
αράσταση της $f(x)=\dfrac{x-4}{|2x+1|}$

(Bacc A, Besançon)

ΛΥΣΗ

εδίο ορισμού $D=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$, αλλά δεν έχει
ίδια έκφραση σ'όλο το D

Ετσι $\begin{cases} f(x)=f_1(x)=-\dfrac{x-4}{2x+1} & \text{για } x\in(-\infty,-\frac{1}{2}) \\ f(x)=f_2(x)=\dfrac{x-4}{2x+1} & \text{για } x\in(-\frac{1}{2},\infty) \end{cases}$ και

δηλαδή $f_2(x)=-f_1(x)$ Ετσι θα μελετήσω την $f_2(X)$
θα έχω συμπεράσμα για την $f(x)$

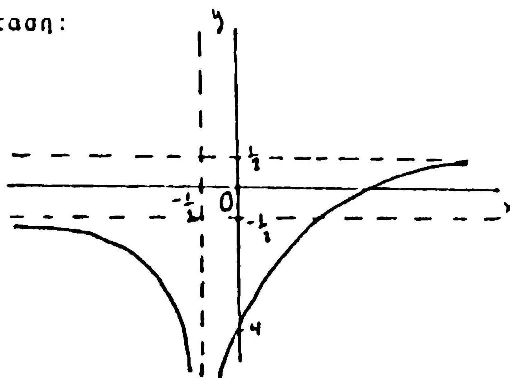
Στο $R-\{-\frac{1}{2}\}$ έχω $f'_2(x)=\dfrac{9}{(2x+1)^2}>0$ Δηλαδή η f_2
ίως αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{1}{2})$ άρα η f_1 γνησίως φθίνουσα
διάστημα αυτό. Η f_2 ομοίως γν. αύξουσα στο $(-\frac{1}{2},\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\frac{1}{2}$

ίνακας μεταβολής είναι

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$

Η γραφική παράσταση:



6. *** S.O.S.

1. 'Εστω $f(x)=\frac{x^2+px+q}{4x}$ όπου $p,q\in\mathbb{R}$

'Εστω (C) η καμπύλη της $f(x)$ σε ορθ. άξονες.

Να προσδιοριστούν τα p και q ώστε ή (C) να πληρεί τις εξής ιδιότητες:

α) Να περνάει απ'το σημείο A(-2,0)

β) Να δέχεται στο A μια εφαπτομένη παράλληλη της $y=0$

2. 'Εστω η $g(x)=\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{x}$ και έστω (Γ) η καμπύλη της (C) στο ίδιο σύστημα αξόνων.

α) Να μελετηθούν οι μεταβολές της $g(x)$.

β) 'Εστω (D) η ευθεία με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x+1$

Εστω επίσης M και Q δύο σημεία που βρίσκονται αντίστοιχα στις (Γ) και (D) με την ίδια τετμημένη. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{MQ}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\overline{MQ}$. Τι συμπεραίνετε απ'αυτό;

γ) Να χαραχτεί η (Γ).

γ) Να δειχτεί ότι το σημείο (0,1) είναι κέντρο συμμετρίας της (Γ)

(Partie du bacc.B.Nantes)

Λ Υ Σ Η

1. Τα ρ και q βρίσκονται απ' τις σχέσεις:

$f(-2)=0$ Επειδή $f'(x)=\frac{1}{4}(1-\frac{q}{x^2})$ το σύστημα

$f'(-2)=0$ γίνεται $4-2\rho+q=0$ $\rho=4$

$1-\frac{q}{4}=0$ $q=4$

Αρα η $f(x)=\frac{x}{4}+1+\frac{1}{x}=g(x)$

2. α. $g'(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{4x^2}$ δηλ. αλλάζει πρόσημο στα ± 2

Επίσης $\lim\limits_{\pm\infty} g(x)=\pm\infty$ Ομοίως $\lim\limits_{0^{\pm}} g(x)=\pm\infty$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	‖		−0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

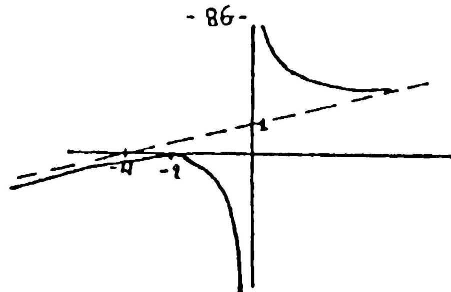
β. Έστω Η, με τετμημένη x η κοινή προβολή των Μ και Q στον Οx. Έχουμε $\overline{MQ}=\overline{HQ}-\overline{HM}=\frac{1}{4}x+1-(\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{MQ}=0_-$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \overline{MQ}=0+$

Αυτό σημαίνει ότι η (D): $y=\frac{1}{4}x+1$ είναι ασύμπτωτη της (Γ).

γ. Αν αναφέρουμε την g(x) σε νέο κατάλληλο σύστημα προκύπτει περιττή. Αρα σε§

δ. Η γραφική παράσταση:



7.

Θεωρούμε τις $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{3}$ και $g(x)=\dfrac{3}{x(x-2)}$

Να γίνουν οι γραφικές τους παράστασεις.

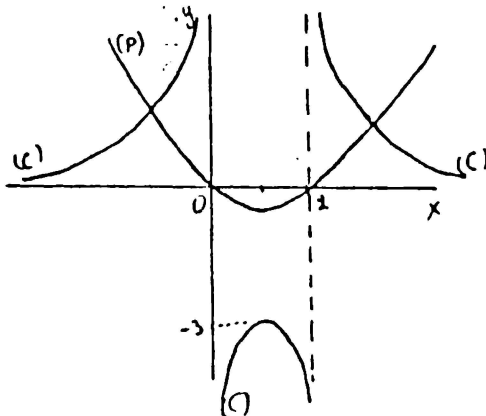
Να βρεθούν τα κοινά σημεία των καμπύλων τους.

Να δειχτεί ότι έχουν οι δύο καμπύλες τον ίδιο άξονα συμμετρίας.

(Partie du bacc. D, Algerie).

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		$-1/3$		0		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Οι πίνακες μεταβολών των δυο συνάρτησεων



Η (P) είναι η καμπύλη της f(x) και η (C) της g(x).

Τα κοινά σημεία M και N προκύπτουν απ' τη λύση $\dfrac{x(x-2)}{3}=\dfrac{3}{x(x-2)} \Leftrightarrow$

$(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)=0$ και επειδή $\forall x: x^2-2x+3\neq 0$
$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ και $x=3$ Αρα τα σημεία είναι
$M(-1,1)$ $N(3,1)$
Για τον κοινό άξονα συμμετρίας:
Η $g(x)$ γράφεται $g(x)=\frac{3}{(x-1)^2-1}$ άρα η $x=1$ είναι
άξων συμμετρίας (νέο σύστημα κ.λ.π., άρτια). Όμως η $x=1$
είναι και άξονας της παραβολής της $f(x)$.

8.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{ax^2+2(a-2)x+1}$ $a\in R$

1. Για ποιές τιμές του a η συνάρτηση f ορίζεται σ'όλο το R ;
2. Δίνεται $a=2$. Να δειχτεί ότι η αντίστοιχη συνάρτηση είναι άρτια. Να μελετηθούν οι μεταβολές της και να χαραχτεί η καμπύλη της (Γ).
3. Δίνεται $a=0$. Να κατασκευαστεί η αντίστοιχη καμπύλη (C). Να βρεθούν τα κοινά σημεία των (Γ) και (C)

(Partie dy bacc.D, Amiens)

Λ Υ Σ Η

1. Αν $a=0$ η $f(x)=\sqrt{-4x+1}$ που ορίζεται μόνο στο $(-\infty,\frac{1}{4})$. Αρα για να ορίζεται σ'όλο το R πρέπει $a\neq 0$, με την προϋπόθεση ότι το τριώνυμο

$\varphi(x)=ax^2+2(a-2)x+1$ είναι πάντα θετικό. Πρέπει δηλ.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta'=(a-2)^2-a\le 0\\ a>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}a^2-5a+4\le 0\\ a>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l}(a-1)(a-4)\le 0\\ a>0\end{array}\Leftrightarrow$$

$$1<a<4$$

Για $a=1$ $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

Για $a=4$ $f(x)=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$

2. Για $a=2$ η $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$ Αυτή είναι άρτια και να τη μελετήσουμε στο $(0,\infty)$ στο οποίο

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}>0 \quad \text{αν } x>0 \quad \text{και} \quad f'(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}=\sqrt{2}$ και

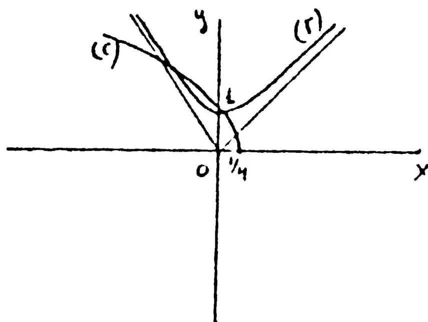
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x\sqrt{2})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+1}-x\sqrt{2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+1}-x\sqrt{2})(\sqrt{2x^2+1}+x\sqrt{2})}{\sqrt{2x^2+1}+x\sqrt{2}}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}+x\sqrt{2}}=0$ Άρα οι $y=\pm x\sqrt{2}$ είναι οι πλάγιες ασύμπτωτες.

3. Για $a=0$ η $f(x)=\sqrt{-4x+1}$ με $D=(-\infty,\frac{1}{4})$. Είναι αυστηρώς φθίνουσα απ' το $+\infty$, στο 0, και η εφαπτομένη σ'αυτή στο $(\frac{1}{4},0)$ είναι // προς τον Oy αφού $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{-4}{2\sqrt{-4x+1}}=-\infty$. Άρα η (C) είναι ένας κλάδος παραβολής στη διεύθυνση του Ox. Είναι η παραβολή του Ox, με κορυφή το $S(\frac{1}{4},0)$ που ορίζεται $\left.\begin{array}{l}y^2=-4x+1\\ y\geq 0\end{array}\right\}$

Τα κοινά σημεία δίνονται απ'τη λύση της εξίσωσης:

$\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{-4x+1} \Leftrightarrow 2x^2+1=-4x+1 \Leftrightarrow 2x(x+2)=0$
αι είναι τα A(0,1) B(-2,+3)
ι γραφικές παραστάσεις δίνονται απ'το σχήμα:



Έστω η $f(x)=\dfrac{x^2+\mu x+1}{x^2-2x-3}$

α. Για βρεθούν οι τιμές για τις οποίες η f
- δέχεται ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο
- δέχεται μόνο ένα ελάχιστο
- δεν δέχεται ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

β. Να μελετηθούν οι μεταβολές της συνάρτησης που προκύπτει για $\mu=-2$ και να γίνει η γραφική της παράσταση (C).

γ. Να δειχτεί ότι η καμπύλη (C) είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας την ευθείαν (Δ) με εξίσωση $x=1$.

δ. Να δειχτεί ότι η f(x) (για $\mu=-2$) μπορεί να γραφεί:
$f(x)=A+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{\Gamma}{x-3}$ (Α,Β,Γ να προσδιοριστούν).
(Bacc. B, Lyon)

Λ Υ Σ Η

Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι $D=R-\{-1,3\}$ και είναι $f'(x)=-\dfrac{(\mu+2)x^2+8x+3\mu-2}{(x^2-2x-3)^2}$

α.- Οι τιμές του μ για τις οποίες η $f(x)$ έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, είναι οι τιμές για τις οποίες το τριώνυμο $\varphi(x)=(\mu+2)x^2+8x+3\mu-2$ με διακρίνουσα $\Delta'=-(3\mu^2+4\mu-20)=-(\mu-2)(3\mu+10)$, έχει δύο διακεκριμένες ρίζες που ανήκουν στο D. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται για $-\frac{10}{3}<\mu<2$

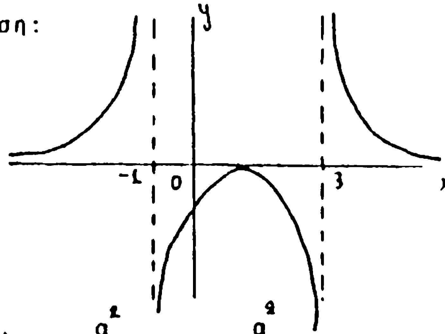
- Για να έχει η $f(x)$ μόνο ένα μέγιστο, πρέπει το τριώνυμο $\varphi(x)$ να ανάγεται σε πρωτοβάθμιο. Αυτό συμβαίνει για $\mu=-2$. Για τη τιμή αυτή του μ η συνάρτηση δέχεται ένα μέγιστο αφού $f'(x)=\dfrac{8(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$ μηδενίζεται περνώντας απ'τα θετικά στα αρνητικά.
- Για να μην έχει η $f(x)$ άκρες τιμές πρέπει $\Delta'\leq 0$ δηλ. $\mu\leq-\frac{10}{3}$ η $\mu\geq 2$

β. Για $\mu=2$ η $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)}$ και $f'(x)=\dfrac{-8(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

με πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

Η γραφική παράσταση:



γ. $\forall a \in D$: $f(1-a)=\dfrac{a^2}{(2-a)(-2-a)}=\dfrac{a^2}{a^2-4}$

$f(1+a)=\dfrac{a^2}{(a+2)(a-2)}=\dfrac{a^2}{a^2-4}$ δηλ. $f(1-a)=f(1+a)$

δηλ. η $x=1$ άξων συμμετρίας

δ. $x^2-2x+1=(x^2-2x-3)+4=(x^2-2x-3)-(x-3)+(x+1)$

άρα $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{(x^2-2x-3)-(x-3)+(x+1)}{(x-3)(x+1)}=$

$=1-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}$

10.

θεωρούμε την $f_{\mu}(x)$ που ορίζεται απ'το τύπο:

$f_{\mu}(x)=\frac{x^2+(\mu-2)x-10}{x^2-2x-3}$ $\mu\epsilon R$ και έστω $(C\mu)$ η καμπύλη της f_{μ} σε ορθ. σύστημα αξόνων

1. α. Να βρεθούν οι τιμές του μ, για τις οποίες η f_μ είναι αύξουσα, σ'όλο το D,(σε κάθε διάστημα που ορίζεται).

β. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες η f_μ έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο.

γ. Να δειχτεί ότι όλες οι καμπύλες (Cμ) περνούν από ένα σταθερό σημείο Α, του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες.

2. Να προσδιοριστεί το μ, ώστε η εφαπτομένη στο Α της (Cμ) να είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{20}{9}x$. Είναι η τιμή μ=2.Να παρασταθεί γραφικά η (C_2)

3. Έστω Β ένα σημείο του άξονα yόy με $\overline{OB}=\lambda$ και (D) παράλληλη πρός τον XOX' που περνάει απ'το Β.

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία (D) τέμνει την (C_2) σε δύο σημεία Μ'και Μ''.

Σημειώνουμε με Β'το σημείο της(D)τέτοιο ώστε $\frac{\overline{B'M'}}{\overline{B'M''}}=-\frac{\overline{BM'}}{\overline{BM''}}$ Να υπολογιστούν συναρτήσει του λ οι συντεταγμένες του Β'.Να κατασκευαστεί στο ίδιο σύστημα με την C_2 η καμπύλη (Γ) που παριστά το σύνολο

των σημείων Β', όταν το λ μεταβάλλεται.

(Bacc.D,Montpellier).

Λ Υ Σ Η

1.α. Το πεδίο ορισμού D της $f_\mu(x)$ είναι το $R-\{-1,+3\}$

Στο D είναι $f'_\mu = -\dfrac{\mu x^2-14x+3\mu+14}{(x^2-2x-3)^2}$

Αρα η f_μ είναι αύξουσα στο D αν και μόνο αν $\forall x \in D$:

$\varphi(x)=\mu x^2-14x+3\mu+14 \leq 0$ η οποία ανάγεται στις

$$\left.\begin{array}{l}\Delta'=49-\mu(3\mu+14)\leq 0\\ \mu<0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}-(3\mu^2+14\mu-49)\leq 0\\ \mu<0\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-(\mu+7)(3\mu-7)\leq 0\\ \mu<0\end{array}\right. \quad \text{τελικά} \quad \mu\leq -7$$

Για $\mu=-7$ έχω $f_\mu(x)=\dfrac{x-10}{x-3}$

β. Οι τιμές του μ, για τις οποίες έχω ένα μέγιστο κι ένα ελάχιστο είναι αυτές που είναι λύσεις της ανισότητας.

$$-(\mu+7)(3\mu-7)>0 \quad ή \quad -7<\mu<\frac{7}{3}$$

γ. Η μόνη τιμή του x, για την οποία η $f_\mu(x)$ παίρνει τιμή ανεξάρτητη του μ, είναι η x=0 για την οποία έχω $f_\mu(0)=\dfrac{10}{3}$ $\forall \mu\in R$.Αρα όλες οι καμπύλες(C_μ)περνούν απ' το σημείο $A(0,\frac{10}{3})$.

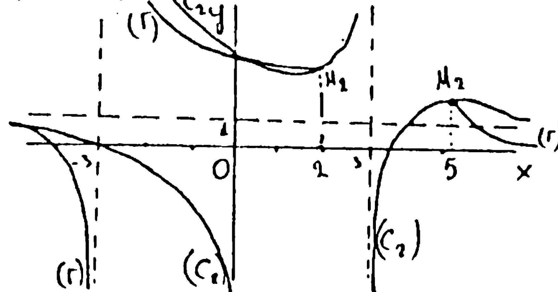
2. Για x=0 έχω $f'_\mu(0)=\dfrac{-3\mu+14}{9}$ άρα πρέπει $\dfrac{-3\mu+14}{9}=\dfrac{-20}{9}\Rightarrow\mu=2$

Η $f_2(x)$ έχει πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	2	3	5	$+\infty$
$f'_2(x)$	$-$	‖	$-\ 0\ +$	‖	$+\ 0\ -$	
$f_2(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 5/4 \searrow 1$	

Η καμπύλη τέμνει τον Οχ, στα $\pm\sqrt{10}$ και την οριζόντια ασύμπτωτη στο $(\frac{7}{2},1)$.

Η γραφική παράσταση είναι:



3. Οι τετμημένες x' και x'' των Μ' και Μ'' δίνονται απ' την εξίσωση $\frac{x^2-10}{x^2-2x-3}=\lambda$ (1) $\Leftrightarrow (1-\lambda)x^2+2\lambda x+3\lambda-10=0$

Αυτή έχει λύση όταν $\lambda \geq \frac{5}{4}$ ή $\lambda \leq 2$

Για $\lambda=2$ τα Μ' και Μ'' συμπίπτουν με το $M_1(2,2)$ και για $\lambda=\frac{5}{4}$, με το $M_2(5,\frac{5}{4})$.

Έστω μ', μ'' και Β' οι ορθές προβολές των Μ', Μ'' και Β'' πάνω στον Οχ. Αν παρατηρήσουμε τη σχέση $\frac{\overline{B'M'}}{\overline{B'M''}}=-\frac{\overline{BM'}}{\overline{BM''}}$ παρατηρούμε ότι η τετράδα (Β, Β', Μ', Μ'') είναι αρμονική. Άρα έχουμε

$\frac{2}{\overline{OB''}}=\frac{1}{\overline{O\mu'}}+\frac{1}{\overline{O\mu''}}$ γιατί η η τετράδα (O,B'',μ',μ'') παραμένει αρμονική. Αν συμβολίσουμε με x την τετμημένη του B' έχω $\frac{2}{x}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''} \Rightarrow x=\frac{2x'x''}{x'+x''}$

Όμως τα x', x'' είναι ρίζες της (1) άρα $x'x''=\frac{3\lambda-10}{1-\lambda}$

και $x'+x''=\frac{-2\lambda}{1-\lambda}$ άρα για $\lambda\neq 0$ $x=\frac{10-3\lambda}{\lambda}$

Τελικά οι συντεταγμένες του Β είναι $x=\frac{10-3\lambda}{\lambda}$ $y=\lambda$ $(\lambda\neq 0)$

Για $\lambda=0$ το σημείο Β είναι το μέσο του $B'B''$ του οποίου τα άκρα B' και B'' είναι τα κοινά σημεία της (C_2) με τον Ox.

Το σύνολο των θέσεων των σημείων Β'.

Μεταξύ των συντεταγμένων του Β' διαπαλειφής του λ παίρνω τη σχέση $x=\frac{10-3y}{y} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{10}{x+3} \\ x\neq -3 \end{cases}$

Αρα το σύνολο των σημείων Β' είναι η υπερβολή (Η):

$y=\frac{10}{x+3}$ Αυτή έχει ασυμπτώτους τις ευθείες $y=0$ και $x=-3$ και περνάει απ' τα σημεία Α, M_1 και M_2. Αλλά επειδή ισχύουν οι συνθήκες ύπαρξης των Μ' και Μ'' το σύνολο (Γ) αποτελείται απ' το τμήμα της υπερβολής (Η) για το οποίο τα x δεν ανήκουν στο $(2,5)$. Στο σχήμα το σύνολο (Γ) διακρίνεται.

11.

Δίδεται η $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{2x+5}$ $(\alpha,\beta) \in R\times R^*$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού E της συνάρτησης f
2. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α και β, ώστε η συνάρτηση f να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα του E.
3. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α και β, ώστε η συνάρτηση f'(x) (παράγωγος) να πληρεί την $f'(x)=\frac{3}{(2x+5)^2}$
4. Να μελετηθούν οι μεταβολές της f, όταν τα α και β πληρούν τη σχέση του ερωτήματος 3.

(Classes de premiere A et B)

ΛΥΣΗ

1. $E=R-\left\{-\frac{5}{2}\right\}$
2. Η συνάρτηση είναι σταθερή στα $(-\infty,-\frac{5}{2})$ και $(-\frac{5}{2},+\infty)$ δηλ. σε κάθε διάστημα που περιέχεται στο E, αν υπάρχει ένας πραγματικός κ έτσι ώστε $x\in E:\frac{\alpha x+\beta}{2x+5}=\kappa$ δηλ. αν $\alpha=2\kappa$ και $\beta=5\kappa$ δηλ. αν $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{5}$ ή $5\alpha-2\beta=0$
3. Η παράγωγος της f για οποιαδήποτε α και β είναι $f'(x)=\frac{5\alpha-2\beta}{(2x+5)^2}$. Αρα η 'παίρνει τη δοθείσα μορφή αν $5\alpha-2\beta=3$ (1).
4. Απ'τη σχέση (1) και το γεγονός ότι $\beta\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq\frac{3}{5}$

Ετσι έχω $f'(x) > 0$ $\forall x \in E$ Αρα η f είναι αύξουσα στα $(-\infty,-\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$. Στο $E-\{0\}$ η $f(x)=\frac{\frac{a}{2}+\frac{\beta}{x}}{1+\frac{5}{x}}$ $(\beta \neq 0)$

Όταν λοιπόν $x \to -\infty$ η $+\infty$ το όριο της f(x) είναι $\frac{a}{2}$ ενώ τα $\frac{\beta}{x}$ και $\frac{5}{x}$ είναι 0. Τελικά ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	$\frac{a}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{a}{2}$

12.

Έστω η $f_m(x)=\frac{x^3}{(x-m)^2}$ όπου $m \in R$. Επίσης έστω

(Cm) η καμπύλη της fm σε ορθ. σύστημα αξόνων.

Α. 1. Να μελετηθούν για τις διάφορες τιμές του m, οι μεταβολές, και η συμπεριφορά των συναρτήσεων fm(x) στα άκρα του πεδίου ορισμού τους. (Θεωρείστε $m<0$, $m=0$ και $m>0$)

2. Να δειχτεί ότι για $\forall m \in R^*$ η ευθεία με εξίσωση $y=x+2m$ είναι ασύμπτωτη της (Cm)

3. Έστω M το σημείο της (Cm) του οποίου η τετμημένη x πληρεί την $f'_m(x)=0$. Να μελετηθεί το σύνολο (E) των σημείων M, όταν το μεταβάλλεται. Να δοθεί η εξίσωση που παριστά τα σημεία M.

4. Να διεχτεί ότι για $m \in R^*$ οι καμπύλες (Cm) και (C-m) είναι συμμετρικές ως προς την αρχή O, των αξόνων.

5. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των (Cm) με τις ευθείες $y=x+2m$ και $y=x$

B. 1. <u>Να χαραχτεί η (C_1) (καμπύλη της f_1)</u>.

2. Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, και δ έτσι ώστε $\forall x \in R-\{1\}$ $f_1(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-1}+\frac{\delta}{(x-1)^2}$

3. <u>Να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου που αποτελείται απ'τα σημεία Μ(x και y)</u> που πληρούν τις

$2 < x < 1+e$ $\quad$ $x+2 < y < f_1(x)$

(Bacc.D, Amiens)

Λ Υ Σ Η

A. 1. Το πεδίο ορισμού της fm είναι $D_m=R-\{m\}$

Αν $m=0$ τότε $D_0=R^*$ και η $f_0(x)=\frac{x^3}{x^2}=x$. Τότε η Co είναι η ευθεία $y=x$ που περνάει x^2 απ'την αρχή των αξόνων. Το 0 δεν ανήκουν την ευθεία εκτός αν ορίσουμε τη νέου $f_0(0)=0$

Για $m\neq 0$ $\quad f'm(x)=\frac{x^2(x-3m)}{(x-m)^3}$ Αυτή μηδενίζεται για

$x=0$ και $x=3m$ ενώ για τις άλλες τιμές του m, έχει το πρόσημο του γινομένου $(x-3m)(x-m)$ πράγμα που μας υποχρεώνει να θεωρήσουμε τις περιπτώσεις $m<0$ και $m>0$.

. Αν $m<0$

$f'm(x)>0 \Leftrightarrow x<3m$ ή $x>m$

και $f'm(x)<0 \Leftrightarrow 3m<x<m$

. Αν $m>0$

$f'_m(x) > 0 \Leftrightarrow x < m$ ή $x > 3m$

$f'_m(x) < 0 \Leftrightarrow m < x < 3m$

Επίσης $\lim_{x \to m} f_m(x) = \begin{cases} -\infty & \text{αν } m < 0 \\ +\infty & \text{αν } m > 0 \end{cases}$

και αν γράψουμε $f_m(x) = \dfrac{x}{(1-\frac{m}{x})^2}$ έχουμε $\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = -\infty$

και $\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$

Άρα οι μεταβολές των f_m δίδονται απ' τους παρακάτω πίνακες.

$m < 0$

x	$-\infty$		$3m$		m		0		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{27m}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$m > 0$

x	$-\infty$		0		m		$3m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27m}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Θα μελετήσουμε το όριο $f_m(x)-(x+2m)$ όταν το $x \to \pm\infty$.

Είναι $f_m(x)-(x+2m) = \dfrac{x^3-(x+2m)(x-m)^2}{(x-m)^2} =$

$= \dfrac{m^2(3x-2m)}{(x-m)^2} = m^2 \cdot \dfrac{3(x-m)+m}{(x-m)^2} = m^2\left[\dfrac{3}{x-m} + \dfrac{m}{(x-m)^2}\right]$ άρα

$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f_m(x)-(x+2m)\right] = 0$ άρα η $y = x+2m$ είναι ασύμπτωτος της C_m

3. Εκτός το O, το μοναδικό σημείο M της C_m για το οποίο $f'_m(x)=0$ είναι το σημείο με συντεταγμένες $x_M=3m$ $y_M=\frac{27m}{4}$ μεταξύ των οποίων υπάρχει η σχέση $y_M=\frac{9x_M}{4}$ Άρα το ζητούμενο σύνολο E είναι η ευθεία με εξίσωση $y=\frac{9x}{4}$ εκτός του O αφού $m\in\mathbb{R}^*$

4. Έχουμε για $x\neq\pm m$

$f_{-m}(x)=\frac{x^3}{(x+m)^2}$ άρα $f_{-m}(-x)=-\frac{x^3}{(x-m)^2}$, αυτή η ισότης δείχνει ότι οι (C_m) και (C_{-m}) είναι συμμετρικές ως προς O.

5. Τα ζητούμενα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f_m(x)-(x+2m)=0 \iff 3x-2m=0 \iff x=\frac{2m}{3}$$

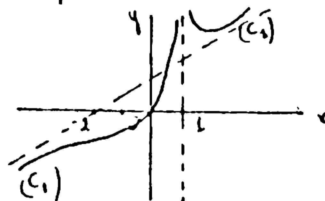
Η καμπύλη λοιπόν (C_m) και η ευθεία $y=x+2m$ (πλάγια ασύμπτωτη της (C_m)) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $\left(\frac{2m}{3},\frac{8m}{3}\right)$

Τα κοινά σημεία της (C_m) και της $y=x$ δίνονται απ'τη λύσης της $\frac{x^3}{(x-m)^2}=x \iff x\left[x^2-(x-m)^2\right]=0 \iff m\,x(2x-m)=0 \iff$ $x=0$ ή $x=\frac{m}{2}$

Τα κοινά σημεία λοιπόν είναι το O και το $\left(\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right)$

B. 1.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'_1(x)$		+		+	‖	−	0	+	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$



2. Απ'το ερώτημα A2 έχω την έκφραση για την $f_m(x)-(x+2m)$. Θέτοντας

$m=1$ έχω $f_1(x)-(x+2)=\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow f_1(x)=x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

μ είναι ο ζητούμενος τύπος για $\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=3, \delta=1$

3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$S=\int_2^{1+e}\left[f_1(x)-(x+2)\right]dx=\int_2^{1+e}\left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx=$$

$$=\left[3\log(x-1)-\frac{1}{(x-1)}\right]_2^{1+e}=4-\frac{1}{e}$$ τετραγωνικές μονάδες.

13.

'Εστω F το σύνολο των συναρτήσεων με τύπο $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{2x+3}$ όπου $\alpha, \beta \in R$

1. Να δειχτεί ότι όλες οι f , και οι παράγωγοι τους έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού E.

2. Ονομάζουμε G το σύνολο των συναρτήσεων f , που είναι σταθερές σε κάθε διάστημα του E. Ποιά σχέση μεταξύ των α και β, χαρακτηρίζει τα στοιχεία του G

3. Να γίνει η γραφική παράσταση ενός στοιχείου του G.

(Classes de premiere A et B)

Λ Υ Σ Η

1. Το πεδίο ορισμού των f(x) είναι $E=R-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Είναι $f'(x)=\frac{3\alpha-2\beta}{(2x+3)^2}$ άρα το πεδίο ορισμού των $f'(x)$ είναι το E.

2. Η συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα, αν η παράγωγος του είναι μηδέν, σ'αυτό.Δηλ. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha-2\beta=0$

3. Μια συνάρτηση απ'το σύνολο G , χαρακτηρίζεται απ' την $\beta=\frac{3}{2}\alpha$.Αρα η $f(x)=\frac{\alpha x+\frac{3}{2}\alpha}{2x+3}=\frac{\alpha}{2}\frac{(2x+3)}{(2x+3)}=\frac{\alpha}{2}$

Δηλ. η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y=\frac{\alpha}{2}$ εκτός του σημείου της με τετμημένη $x=-\frac{3}{2}$

14.

1\. α. Να βρεθούν τα όρια όταν $x\to 0$ του $x\log|x|$ και του $x^2\log|x|$

β. Ομοίως $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

γ. Ομοίως $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\log|x|}-1}{x}$

2\. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x^2\log|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

Είναι συνεχής στο 0; Είναι παραγωγίσιμη στο 0;
Να γίνει η γραφική της παράσταση.

(Baccalauréat, C,Sud Viet-Nâm)

ΛΥΣΗ

1\. α. Θέτω $x=\frac{1}{X}$ και ψάχνω το όριο του $X\to +\infty$

ης παράστασης $\frac{1}{x}\log\left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x}\log x$. Καθώς $\frac{\log x}{x} \to 0^+$

υμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \to 0^+} x\log|x| = 0^-$ $\lim_{x \to 0^-} x\log|x| = 0+$

ρ $x^2\log|x| = x.x\log|x|$ άρα $\lim_{x \to 0} x^2\log|x| = 0_-$

β. Το όριο αυτό, είναι εξ'ορισμού η παράγωγος

κ στο $x=0$ που είναι το 1, για την $\frac{e^{x^2\log|x|}-1}{x}$

Έτω $x^2\log|x| = \kappa$ και θεωρούμε με την ισότητα

$\frac{e^{x^2\log|x|}-1}{x} = \frac{e^\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\kappa}{x} = \frac{e^\kappa - 1}{\kappa} \cdot x\log|x|$

'Οταν το $x \to 0$ έχουμε απ'το α'ερώτημα ότι η $x\log|x|$ ιει στο 0 με το πρόσημο του $-x$, και το κ τείνει στο 0_+

Αρα σύμφωνα με το προηγούμενο όριο $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x\log x}-1}{x} = 0$ το πρόσημο του$-x$.

2. 'Οταν $x \to 0$ το $x^2\log|x|$ τείνει το 0- Αρα $e^{x^2\log|x|} \to 1 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x=0$.

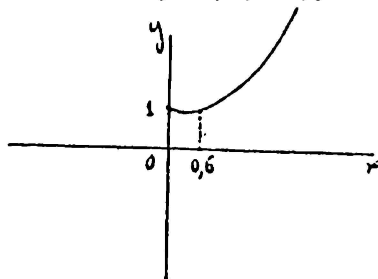
Επίσης το όριο του $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^{x^2\log|x|}-1}{x}$ όταν $x \to 0$ ιρχει και ειναι 0. Αρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ιαι $f'(0)=0$.

Για την γραφική της παράσταση είναι $f'(x) = xe^{x^2\log|x|}(2\log|x|+1)$ που μηδενίζεται

$x_0 = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6$. Ο πίνακας μεταβολών είναι ο ακόλουθος

x	0		0,6		$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↘	0,8	↗	$+\infty$

Η καμπύλη είναι κλάδος παραβολής στα θετικά του Ox.



15.

Έστω η $f(x)=(2x^2-3x)e^x$

1. Αν είναι γνωστό ότι $\frac{e^x}{x}\to\infty$ όταν $x\to\infty$ να βρεθεί το όριο του $\frac{e^x}{x^2}$ όταν $x\to\infty$. Να βρεθούν τα όρια xe^x και x^2e^x όταν $x\to-\infty$

2. Να γίνει η γραφική παράσταση (Γ) της συνάρτησης f
Να βρεθούν τα όρια της f (x) όταν $x\to\pm\infty$
Ομοίως της $\frac{f(x)}{x}$ όταν $x\to+\infty$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση παίρνει μια μέγιστη τιμή στο διάστημα $(-\infty,0]$
Να υπολογιστεί αυτό το μέγιστο.

3. Να βρεθεί μια αρχική F της συνάρτησης f

(Baccalauréat D, Bordeaux)

Λ Υ Σ Η

1. Όριο του $\frac{e^x}{x^2}$ Θέτω $x=2t$ κι έχω $\frac{e^x}{x^2}=\frac{e^{2t}}{4t^2}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2$. Αρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2=+\infty$

Οριο του $x.e^x$ θέτω $x=-t$

$\lim_{x\to+\infty} xe^x=\lim_{t\to+\infty}(-te^{-t})=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$ αφού $\frac{e^t}{t}\longrightarrow+\infty$

Οριο του $x^2.e^x$ θέτω $x=-2t$

$\lim_{x\to} x^2 e^x=\lim_{t\to+} 4t\, e^{-2t}=4\lim_{t\to+}\left(\frac{t}{e^t}\right)=0$

2. Πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty,\infty)$. Είναι $f'(x)=(x-1)(2x+3)e^x$. Η $f(x)$ γράφεται $:f(x)=x^2(2-\frac{3}{x})e^x$ Αρα

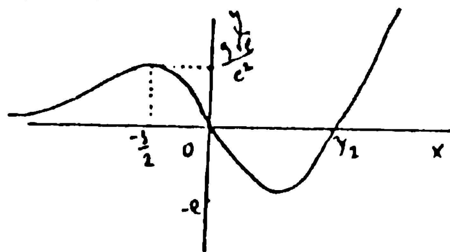
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ (με τη βοήθεια του 1) και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ομοίως)

Ο πίνακας μεταβολών λοιπόν είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$9e^{-3/2}$	↘	$-e$	↗	$+\infty$

Πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχουμε αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Η καμπύλη (Γ) είναι:



Για $x=-\frac{3}{2}$ έχουμε μέγιστη τιμή την $M=9e^{-3/2}=\frac{9\sqrt{e}}{e^2}$

3. Μια αρχική της f είναι $F=(2x^2-7x+7)e^x+C$

16.

Έστω η συνάρτηση:

$f_\mu(x)=\mu(\mu-1)x^3-\mu x^2+x+1$. $\mu\in R$ Η καμπύλη που αντιστοιχεί στην $f\mu$ θα συμβολίζεται με $(C\mu)$

1. Να σχεδιαστούν οι καμπύλες C_o, C_1 και να προσδιοριστεί η τομή τους.

2. Να δειχτεί ότι οι καμπύλες $(C\mu)$ έχουν ανά δύο ένα σημείο επαφής το οποίο να προσδιοριστεί.

3. Να γίνει η γραφική παράσταση Ε της $g(x)=$

$=-\frac{x}{4}(x+1)^2+(x+1)$

4. Να μελετηθεί η τομή της $(C\mu)$ και της (Ε). Να δειχτεί ότι, εκτός από μια εξαίρεση, οι καμπύλες $(C\mu)$ εφάπτονται της (Ε) σ'ένα σημείο $B\mu$ του οποίου να υπολογιστεί η τετμημένη συναρτήσει του μ.

5. Νακαθοριστούν οι συντεταγμένες των Bo και B_1.

(Classes de premières C.D.E)

ΛΥΣΗ

1. Έχουμε $\forall x\in R$ $f_o(x)=x+1$. Η (Co) λοιπόν είναι η ευθεία $y=x+1$. Επίσης $f_1(x)=-x^2+x+1$ $x\in R$. Η (C_1) παραβολή με τα κοίλα κάτω. Οι τετμημένες των σημείων τομής τους δίδονται απ'τη λύση της $x+1=-x^2+x+1$. Προκύπτει λοιπόν εύκολα ότι η (Co) είναι εφαπτόμενη της (C_1) στο σημείο $A(0,1)$ και $(Co)\cap(C_1)=\{A\}$

2. Σύμφωνα με τα προηγούμενα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε καμπύλη (C_μ) περιέχει το A, και εφάπτεται της (C_0) στο σημείο αυτό. Τότε όλες ανά δύο θα εφάπτονται στο A. Πρέπει λοιπόν $f_\mu(0)=1=f_0(1)$ Αλλά αυτό ισχύει. Ετσι $\forall \mu\in\mathbb{R} \Rightarrow A\in(C_\mu)$ Επίσης έχουμε $f'_\mu(x)=3\mu(\mu-1)x -2\mu x+1$ και $f'_\mu(0)=1=f'_0(0)$ δηλ. η (C_0) είναι εφαπτόμενη της (C_μ) στο A.

3. Εχουμε $\lim\limits_{-\infty} g =+\infty$ $\lim\limits_{+\infty} g=-\infty$

Επίσης $g'(x)=-\frac{1}{2}(3x^2+4x-3)$

Είναι $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$. Ο πίνακας μεταβολής της g

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$		$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$		$+\infty$
g'		-	0	+	0	-	
g	$+\infty$	↘	$\frac{19-13\ 13}{54}$	↗	$\frac{19+13\ 13}{54}$	↘	$-\infty$

Η(Ε) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

4. Τα κοινά σημεια (οι τετμημένες τους) των $(C\mu)$ και της (E) δίδονται απ'την εξίσωση:

$-\frac{x}{4}(x+1)^2+(x+1)=\mu x^2\left[(\mu-1)x-1\right]+x+1.$ γράφεται

$x\left[4\mu(\mu-1)x^2-4\mu x-(x+1)^2\right]=0$ η τελικά

$x\left[(2\mu-1)x-1\right]^2=0$ Οι λύσεις είναι

$x=0$ και για $\mu\neq\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{2\mu-1}$

Το σύνολο $(C\mu)\cap(E)$ αποτελείται απ'τα σημεία A(0,1)

και για $\mu \neq \frac{1}{2}$ το σημείο $B_\mu\left(\frac{1}{2\mu-1},\ f_\mu\left(\frac{1}{2\mu-1}\right)\right)$

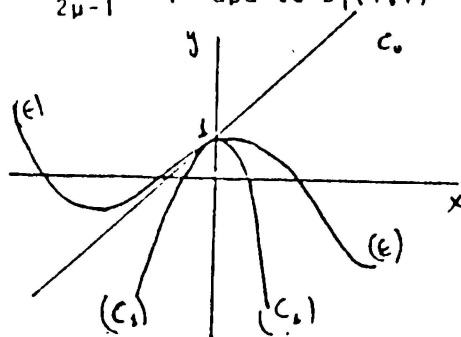
Εχουμε $g'\left(\frac{1}{2\mu-1}\right)=\frac{3\mu^2-5\mu+1}{(2\mu-1)^2}$

Επίσης $f'_\mu\left(\frac{1}{2\mu-1}\right)=\frac{3\mu^2-5\mu+1}{(2\mu-1)^2}$ Αρα οι (C_μ) και η (E) είναι εφαπτόμενες στο B_μ.

Μόνο η καμπύλη $C_{\frac{1}{2}}$ κάνει εξαίρεση

5. Για $\mu=0$ το $\frac{1}{2\mu-1}=-1$ άρα $B_0=(-1,0)$

για $\mu=1$ $\frac{1}{2\mu-1}=1$ άρα το $B_1(1,1)$



17.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2}$

1. <u>Να μελετηθούν οι μεταβολές της.</u>

2. Να χαραχτεί η καμπύλη της C

3. Από σημείο A της καμπύλης(C) με τετμημένη -1 έρουμε την ευθεία (D) με συντελεστή κατεύθυνσης μ. Ποιά ίναι η εξίσωση αυτής της ευθείας; Διερευνήστε το πλήθος ων κοινών σημείων των (C) και (D) για τις διάφορες τιμές ου μ.

Αν μ=-1 να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών. Τι παρατηρείτε;

(Partie du bacc.B, Centre d'Outre-mer)

Λ Υ Σ Η

1. Πεδίο ορισμού $D=R-\{1\}$ Σ'αυτό είναι

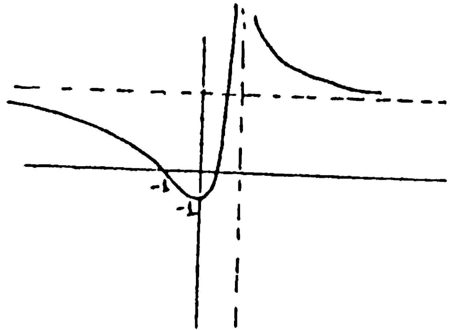
$f'(x)=-\dfrac{8x}{(x-1)^3}$ που μηδενίζεται για $x=0$ και αλλάζει πρόσημο στο 0 και στο 1. Επίσης $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2}=3$ Αρα έχω τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	‖	-	
f(x)	3	↘	-1	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3

Η καμπύλη (C) τέμνει τον x'x στα A και B με τετμημένη -1 και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα, και την οριζόντια ασύμπτωτη της $y=3$ στο σημείο με τετμημένη $x=\frac{1}{2}$ που είναι ρίζα της $\dfrac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2}=3$. Το $(-\frac{1}{2},-\frac{5}{9})$ σημείο καμπής.

Τελικά η καμπύλη (C) είναι η ακόλουθη:

Κατ.ασύμπτωτη: $x=1$



3. Το $A=(-1,0)$ και η(D) : $y=\mu(x+1)$

Το ζητούμενο πλήθος των σημείων προκύπτει απ'τη λύση της: $\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2}=\mu(x+1) \Leftrightarrow 3x^2+2x-1\mu(x+1)(x-1)^2=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x-1)-\mu(x+1)(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[3x-1-\mu(x-1)^2]=0$$

με μία ρίζα $x=-1$ που δίνει το σημείο A και την

$\mu(x-1)^2-3x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu x^2-(2\mu+3)x+\mu+1=0$

με διακρίνουσα $\Delta=(2\mu+3)^2-4\mu(\mu+1)=8\mu+9$ απ'όπου:

για $\mu<-\frac{9}{8}$ δεν έχουμε λύσεις

για $\mu=-\frac{9}{8}$ μια διπλή λύση $x'=x''=-\frac{1}{3}$

για $\mu>-\frac{9}{8}$ δύο λύσεις $x_1=\frac{2\mu+3+\sqrt{8\mu+9}}{2\mu}$ $x_2=\frac{2\mu+3-\sqrt{8\mu+9}}{2\mu}$

Τελικά το συμπέρασμα για τα κοινά σημεία είναι:

για $\mu<-\frac{9}{8}$ το μοναδικό κοινό σημείο το A.

για $\mu=-\frac{9}{8}$ έχουμε το Α και το $(-\frac{1}{3},-1)$ σημείο επαφής των (D) (C)

για $\mu>-\frac{9}{8}$ έχουμε τρία κοινά σημεία το Α και τα M_1, M_2 με συντεταγμένες αντίστοιχα τις $(x_1, \mu(x_1+1))$ και $(x_2, \mu(x_2+1))$.

Για $\mu=-1$ έχω $x_1=-1$ και $x_2=0$, και το σημείο M_1 συμπίπτει με το Α και συνεχώς η (D) εφάπτεται της (C) στο Α. Το M_2 είναι σημείο της (C) το (0,-1)

18.

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=x+2-\frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad g(x)=x+2+\frac{1}{x+1}$$

1. Γράψτε τον πίνακα μεταβολών των δύο συναρτήσεων.
2. Δείξτε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν για ασύμπτωτο την ευθεία $y=x+2$
3. Ομοίως οι δύο συναρτήσεις (καμπύλες) έχουν το σημείο (-1,1) κέντρο συμμετρίας.
4. Να υπολογιστεί το σημείο της καμπύλης της f(x) στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την $y=2x$

(Partie du Bacc. D. Mohtpellier).

ΛΥΣΗ

1. Η f: $D_f=R-\{-1\}$ με $f'(x)=1+\frac{1}{(x+1)^2}>0 \quad \forall x\in D_f$

Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to -1^{\pm}} f(x)=\mp\infty$

Η g: $D_g=R-\{-1\}$ με $g'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

Επίσης $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to -1^{\pm}} g(x)=\pm\infty$ Οι πίνακες είναι

x	$-\infty$		-1	∞
f'	+		‖	+
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$		‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
g'	+	0	− ‖ −	0	+
g	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

2. Είναι

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[g(x)-(x+2)]=0$ αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+1}=0$

3. Αν γράψω τις συναρτήσεις σε νέο σύστημα αξόνων $XO\Psi$ με $x+1=X$ τότε γίνονται:

$y-1=\Psi$ ∴ $f_1(X)=X-\frac{1}{X} \qquad g_1(X)=X+\frac{1}{X}$

και είναι περιττές. Άρα οι καμπύλες τους έχουν την αρχή των αξόνων, που τώρα είναι το $(-1,1)$ σαν κέντρο συμμετρίας.

4. Οι τετμημένες των ζητουμένων σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=2 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2-1=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ και $x=-2$

Στο $x=0$, ενώ στο $x=-2$ το σημείο $B(-2,1)$ και η εφαπτό-

ενη $y-1=2x$, ενώ στο $x=-2$ το σημείο $B(-2,1)$ και η εφαπτόμενη $y-1=2(x+2)$

19.

A.1 Να δειχτεί ότι η ποσότητα $\sqrt{x^2-1}+x$ είναι θετική αν $x>1$ και αρνητική αν $x<-1$

2. Να βρεθούν τα όρια των παραστάσεων:

$\sqrt{x^2-1}+x$ όταν $x \to +\infty$

$\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ όταν $x \to +\infty$

$\left[\sqrt{x^2-1}+x\right]-2x$ όταν $x \to +\infty$

Δείξτε ότι το $\sqrt{x^2-1}+x$ τείνει στο 0 όταν $x \to -\infty$.

Να βρεθούν τα όρια της $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$ όταν $x \to \pm\infty$

B. Έστω η συνάρτηση $y=x+\sqrt{x^2-1}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της (πεδίο ορισμού, μονοτονία, συμπεριφορά στα $\pm\infty$).

2. Να γίνει η γραφική της παράσταση (γ)

Να δειχτεί οτι δέχεται δύο ασυμπτώτους με εξισώσεις $y=0$ και $y=2x$

3. Για κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ της (γ) ορίζουμε το συμμετρικό του $M_1(x_1,y_1)$ ως προς την αρχή των αξόνων.

Να χαραχτεί η καμπύλη (γ_1) που είναι ο γ. τόπος των M_1.

Να δειχτεί ότι η καμπύλη (Γ) που αποτελείται απ' την (γ) και την (γ_1), παριστάνει το σύνολο των σημείων που οι

συντεταγμένες τους πληρούν τη σχέση.

$(y-x)^2 - x^2 + 1 = 0$

(Bacc. Mathem Antilles et Guyane.)

ΛΥΣΗ

Α. 1. Η ποσοτητα ορίζεται για όλα τα $x \in R$ εκτός των $-1 < x < 1$

Για $x > 1$ είναι άθροισμα θετικών ποσοτήτων άρα θετική. Για $x < -1$ θέτοντας $|x| = a$ γράφεται

$\sqrt{a^2-1} - a$ ή $\dfrac{\sqrt{a^2-1} - a}{1}$ ή $\dfrac{(a^2-1)-a^2}{\sqrt{a^2-1}+a} = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2-1}+a}$

Ο παρανομαστής όντας θετικός το κλάσμα είναι αρνητικό.

2. Το πρώτο όριο είναι το $+\infty$ (απλό).

Το κλάσμα $\dfrac{\sqrt{x^2-1} + x}{x} = \dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + x}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1$ αφού $x > 1$.

άρα το ζητούμενο όριο είναι το 2.

Για το τρίτο όριο έχουμε

$\left[(\sqrt{x^2-1} + x) - 2x\right] = \sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ και αφού

ο παρανομαστής τείνει στο $+\infty$, το κλάσμα τείνει στο 0.

Για το $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x)$ θέτοντας $|x| = a$ έχω

$\lim\limits_{a \to +\infty} (\sqrt{a^2-1} - a) =$ απ'τα προηγούμενα $= 0$.

Η $\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ αν $x \to +\infty$ γράφεται

$$1+\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \longrightarrow 2$$

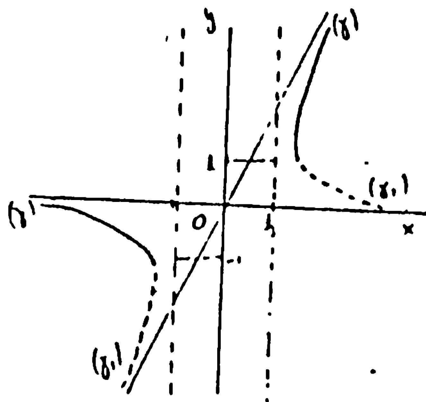
Αντίστοιχα όταν $x \to -\infty$ η παράσταση $\longrightarrow$ 0.

B . Είναι $y' = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$ Απ'τα προηγούμενα έχουμε ότι η παράγωγος είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $x < -1$.

Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
y'	0	-	-		$+\infty$	+	+2
y	0	↘	-1		+1	↗	$+\infty$

Η γραφική παράσταση:



Για τις ασυμπτώτους: η $y=0$ προφανώς. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}-2x\right]=0$ απ την προηγούμενη μελέτη. Αρα η $y=2x$ ασύμπτωτος.

3. Η καμπύλη (γ) και η συμμετρική της (γ_1) ως προς το 0, έχουν σχεδιαστεί στη γραφική παράσταση, με συνεχή και διακεκομένη γραμμή αντίστοιχα.

Αν M(α,β) είναι ένα σημείο της (γ) τότε ισχύει $\beta=\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$. Οι συντεταγμένες του M_1 είναι $x_1=-\alpha$ και $y_1=-\beta$, και απ'τον την προηγούμενη σχέση, προκύπτει για τα x_1, y_1:

$$-y_1=-x_1+\sqrt{x_1^2-1} \quad \text{ή} \quad y_1=x_1-\sqrt{x_1^2-1}$$

Οι εξισώσεις λοιπόν των (γ) και $(γ_1)$ είναι αντίστοιχα:

$$y=x+\sqrt{x^2-1} \quad \text{και} \quad y=x-\sqrt{x^2-1}$$

Άρα η καμπύλη (Γ) που αποτελείται απ'το σύνολο των (γ) και $(γ_1)$ είναι η (έχει εξίσωση):

$$(y-x-\sqrt{x^2-1})(y-x+\sqrt{x^2-1})=0 \text{ ή } (y-x)^2-(x^2-1)=0$$ οεδ

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-|x|-2$

1. Να δειχτεί ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
2. Να παρασταθεί γραφικά

(Classes de première A,D,C)

---

2. Δίνεται η $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
2. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της και να χαραχτεί η γραφική της παράσταση.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$

Bacc. A, Montpellier).

(Απάντηση 3ου: $y=-\frac{7}{9}x+\frac{1}{3}$)

3. Έστω οι συναρτήσεις $f_\mu(x)=\mu x^3+x^2+x-4$ $\mu \in R$
Να υπολογιστεί το μ, για το οποίο η εξίσωση $f'_\mu(x)=0$ έχει δύο αντίθετες ρίζες. Να μελετηθεί στη συνέχεια η $f_\mu(x)$, για τη τιμή του μ, που βρέθηκε, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(Classes de première C,D,E).

(Απάντηση: Έστω α και -α οι αντίθετες ρίζες. Πρέπει $f(a)+f(-a)=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow$ ......$\mu=-1$)

4. 1. Επαληθεύστε την ισότητα: $(x-1)^2(x+2)=x^3-3x+2$ $\quad x \in R$

2. Έστω η συνάρτηση $y=f(x)=x^3-3x+2$. Μελετήστε τις μεταβολές της και χαράξτε τη γραφική της παράσταση (C)

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο (0,2) και να χαραχτεί η εφαπτομένη αυτή.

Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής της (C) και του άξονα x'x.

(Baccalaureat A, Limoges)

(Απάντηση: Εξ. εφαπτ. $y=-3x+2$. Τέμνει τον x'x στο (-2,0) και τον εφάπτεται στο (1,0).

---

5. Εστω η $f(x)=x \cdot e^x$

1. Να γίνει η γραφική της παράσταση (C) και να βρεθεί ο συντελεστής κατευθύνσεως της εφαπτομένης της στο $x=0$.

2. Εστω $g(x)=x \cdot e^{-x}$ Αν (C΄) είναι η καμπύλη της $g(x)$, τι σχέση έχει με την C;

(Bacc. A, Orléans-Tous)

(Απάντηση: Οι (C) και (C΄) είναι συμμετρικές ως προς το 0)

Για Α΄ Δέσμη

6. Εστω η σχέση: $y^2+\lambda x^2+(\lambda+1)x-\frac{\lambda}{4}=0$ $\quad \lambda \in R$

1. Να εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του λ το είδος των καμπύλων που παριστά η σχέση αυτή, σε ορθ. άξονες.

2. Να δοθούν οι συντεταγμένες των κέντρων συμμετρίας των καμπύλων σε κάθε περίπτωση, καθώς και οι εξισώσεις των ασυμπτώτων τους.

(Bacc. D et E, Dakar)

(<u>Απάντηση:</u> Αν $\lambda < 0$ παριστά υπέρβολή, αν $\lambda > 0$ έλλειψη.)

---

6. Έστω οι συναρτήσεις $f_\mu(x)=\dfrac{\mu x^2-2x+1}{x-1}$

Συμβολίζουμε με $(C\mu)$ τις καμπύλες την $f_\mu(x)$ σε ορθ. σύστημα.

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος $f'_\mu(x)$

2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f_1 και f_0 και να δειχτεί ότι οι καμπύλες C_1 και C_0 εφάπτονται σ' ένα σημείο Α το οποίο να καθοριστεί. Να παρασταθούν γραφικά οι δύο συναρτήσεις.

3. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε μ, η (C_μ) εφάπτεται στο Α την C_1.

4. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η C_2 σε σύστημα διαφορετικό απ'το προηγούμενο.

Να βρεθεί μιά πλάγια ασύμπτωτας και ένα κέντρο συμμετρίας για την C_2

5. Ολες οι καμπύλες (C_μ) έχουν κέντρο συμμετρίας;

(Classes de premiere C,D,C)

(Απάντηση: 3. ύλες οι (C_μ) περιέχουν το A(ο,-1). Αφ'ετέρου

$f'_1(0)=f'_\mu(0)=1$ οες

5. Παι το $S=(1,2(\mu-1))$)

---

7. Έστω η $f(x)=\dfrac{(2x-7)(2x-1)}{4(x-|x-1|)}$

Απλοποιείστε τον τύπο της: (εξαγωγή απόλυτου)

Εξετάστε αν στο x=1 είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

[redacted].

---

8. Έστω η $y=\alpha\eta\mu^2x(1-\sigma\upsilon\nu x)$

1. Να υπολογιστεί η y'(α σταθερά)

2. Να οριστεί η σταθερά α, απ'το γεγονός $y(\frac{\pi}{2})=2$

[redacted]ς.

Έστω $y=f(x)=(1-\frac{1}{x})\,e^{\frac{1}{x}}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, και τα όρια της
άρτησης όταν $x\to\pm\infty$ και όταν $x\to 0$
Μελετήστε τη μονοτονία της

(Bacc. C, Dijon)

άντηση: Απ'το $(-\infty,0)$ γν. φθ, και στο $(0,\infty)$ γν. αύξουσα).

Έστω $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1. Να βρεθούν τα όρια της $f(x)$ στα άκρα του πεδίο
ισμού. ($\pm\infty$ $-1^{\pm}$) Να μετασχηματιστεί η $f(x)$ στη μορφή
$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x+1}$ και να προσδιοριστούν τα α, β, γ.

2. Έστω (Γ) η γραφική παράσταση της $f(x)$.
δείξετε ότι η ευθεία (Δ) με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$,
ου τα α, β είναι αυτά που βρέθηκαν στο 1.
ναι ασύμπτωτη της (Γ). Να βρεθεί μια άλλη ασύμπτωτη
ς (Γ) έστω η (Δ'). Να δειχτεί ότι το σημείο Ι, σημείο
ομής των (Δ) και (Δ') είναι κέντρο συμμετρίας της (Γ)

(Bacc. B, LYON)

πάντ. $\alpha=1$ $\beta=-2$, $\gamma=2$ $I(-1,-3)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $y=3x-4x^3$

1. Να παρασταθεί γραφικά.

2. Τέμνουμε την (C)της προηγούμενης γραφικής παράστασης με μια ευθεί παράλληλη του Οx την $y=\lambda$.Για ποιά λ, απ'τα σημεία τομής που προκύπτουν υπάρχουν δύο τα Μ',Μ'' των οποιών οι τετμημένες x',x''είναι θετικές;Βρήτε μια σχέση ανεξάρτητη του λ , ανάμεσα στα x',x''.

3. Η ευθεία Μ'Μ'' τέμνει την (C) σε ένα σημείο Μ. Υπολογίστε την τετμημένη του Μ,συναρτήσει των x',x''.

4. Αν είναι γνωστή η τετμημένη α, του μέσου Α του τμήματος Μ'Μ''να προσδιοριστούν τα x' και x''.Να γίνει διερεύνηση.Να υπολογίστε το λ συναρτήσει του α.

5. Θέτω $x=\eta\mu t$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$.Δείξτε ότι $y=\eta\mu 3t$. Αν t' και t'' είναι οι τιμές του t, που αντιστοιχούν στις x' και x'' $(t' < t'')$ να γράψετε τι σχέση υπάρχει ανάμεσα στα t' και t''.Να προσδιοριστούν τα t' ,t'' ώστε το σημείο τομής της $y=\lambda$ με τον Οy είναι συζυγές του Μ''ως προς τα Μ και Μ'.

6. Μια ευθεία $y=\alpha x$, τέμνει την καμπύλη C, σ'ένα σημείο Ρ με θετική τετμημένη.Να προσδιοριστεί το α, ώστε αυτή η ευθεία, να χωρίζει σε δύο ίσα μέρη, το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη και στον άξονα Οx.

(Institut Catholique d'Arts et Metiers)

12. 1. Να γίνει η γραφική παράσταση (C) της

$y=x\frac{a+x}{a-x}$

2. Μια ευθεία που περνάει απ'το A(-a,0) σχηματίζει με τον Οχ γωνία ω, έτσι ώστε $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ και τέμνει

τον Οy στο σημείο P και την (C) στο M.

Να υπολογιστούν συναρτήσει των a και ω, οι συντεταγμένες των M και P. Να συγκριθούν τα OP και PM.
Να σχνματιστεί η εξίσωση του γ. τόπου των σημείων M' συμμετρικών του M ως προς P. Να χραχτεί ο γ. τόπος(C ')

Η κάθετος στο M, στην ευθεία AP τέμνει τον Οy στο Q .Να υπολογιστεί το MQ

3. Τέμνουμε την καμπύλη (C) με την ευθεία y=x.εφφ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του σημείο τομής M, συναρτήσει του φ. Ετσι το σημείο M συνδέεται αφ'ενός με το ω και αφ'ετέρου με το φ. Να υπολογιστεί η φ συναρτήσει της ω.

Να υπολογιστεί η φ ώστε το τρίγωνο AOM να είναι ισοσκελές.

(Institut Catholique d'arts et metiers).

13. 1. Να προσδιοριστεί η αρχική f(x) της $y=6x(2x^2-x-1)$ έτσι ώστε f(-1)=2. Να γίνει η γραφική της παράσταση C.

2. Εστω $Mo(x_0,y_0)$ σημείο της C.Να βρεθούν τα σημεία M(x,y) της C στα οποία η καμπύλη να δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς την εφαπτομένη στο Mo.

Σχηματίστε την εξίσωση που δίνει τις τετμημένες των σημείων Μ. Πως πρέπει να διαλέξουμε το x_0, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση;Για ένα τέτοιο x_0, υπάρχουν δύο σημεία απ τα Μ, τα M_1 , M_2, διακεκριμένα ή όχι, με συντεταγμένες (x_1,y_1) ,(x_2,y_2) αντίστοιχα.Υπολογίστε το x_1 όταν τα M_1 M_2 ταυτίζονται.Πως πρέπει να διαλέξουμε το Mo, ώστε τα M_1 , M_2 να ταυτίζονται με το Mo;

3. Να οριστούν τα α, β, συναρτήσει του Xo,ώστε η ευθεία $y=ax+\beta$ να περνάει απ'τα σημεία M_1 ή M_2.Σχηματίστε τη τριτοβάθμια εξίσωση που πρέπει να πληρεί το x_0, ώστε η M_1 M_2 να είναι εφαπτομένη της C. στο M_1 ή στο M_2.

Ποιά είναι η τιμή του x_0, ώστε η M_1M_2 να εφάπτεται της C στα διακεκριμένα σημεία M_1 και M_2.Σχηματίστε σ' αυτή τη περίπτωση την εξίσωση της M_1M_2.

(Bacc. économique ,France métrop)

(Απάντηση: 1. $f(x)=x^2(3x^2-2x-3)$ Σημεία καμπής

$$I_1=\left(\frac{1-\sqrt{7}}{6}\ ;\ \frac{20\sqrt{7}-71}{108}\right)$$

$$I_2=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{6}\ ,\ \frac{-20\sqrt{7}+7}{108}\right)$$

2. Εξίσωση τετμημένη των σημείων $M:2x^2+(2x_0-1)x+$ $+2x_0^2-x_0-1=0$.

Για να έχει λύση πρέπει $\frac{1-2\sqrt{7}}{6} \leq x_0 \leq \frac{1+2\sqrt{7}}{6}$

Όταν M_1 , M_2 ταυτίζονται $x_1=x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{6}$ (ταυτίζονται με το I_1).

3. $\alpha=\frac{1}{8}(24x_0^3-12x_0^2+2x_0-9)$

$\beta=-\frac{1}{8}(4x_0^3-16x_0^2+5x_0+7)$ $\quad 72x_0^3-36x_0^2-50x_0+9=0$

$x_0=\frac{1}{6}$ $\quad M_1 M_2=\ y=-\frac{10x}{9}-\frac{15}{7})$

---

14. 1. Μελέτη και γραφική παράσταση C της $y=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$



2. Έστω(D) η ευθεία που περνάει απ'την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή κατευθύνσεως μ.

Να σχηματιστεί η εξίσωση που δίνει τις τετμημένες των κοινών σημείων των (C) και (D) .Διερευνήστε το πλήθος των κοινών σημείων.Για ποιά μ, οι (C)και (D) εφάπτονται;

3. Έστω η εξίσωση $(x-1)\eta\mu^2 t-2(\kappa+1)\eta\mu t+\kappa=0$ όπου $t\in(0,2\pi)$ και κ παράμετρος.Να εκφραστεί το κ, συναρτήσει του t.Στη συνέχεια να δειχτεί ότι συναρτήσει αυτού του κ , ,πορώ να βρώ το πλήθος των κοινών σημείων της (C) και μιας μεταβλητής ευθείας παραλλήλου προς τον Οx.Να βρεθεί το κ, ώστε η εξίσωση ως προς t, να έχει δύο συμπληρωματικές λύσεις.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=\alpha\frac{x^2+2x}{(x-1)}$. Ποιά είναι η παράγωγός της;Ποτέ αυτή μηδενίζεται;Η καμπύλη της y, η (Cα) τέμνει τον x'x σε δύο σημεία.

Να προσδιοριστεί το α, ώστε οι εφαπτόμενες της α στα σημεία αυτά να είναι κάθετες.

(Bacc. écon France métrop)

(Απάντηση: 1. Ασύμπτ. $x=1$, $y=2$ Περνάει απ'τα $(0,0)$,$(-2,0)$

2. Κοινά σημεία $\mu x^2-(2\mu+1)x+(\mu-2)=0$ Πλήθος:

$\mu < -\frac{1}{12}$ κ.λ.π. , εφάπτονται για $\mu=-\frac{1}{12}$ και $\mu=2$

3. $\kappa=\frac{\eta\mu^2 t+2\eta\mu t}{(\eta\mu t-1)^2}$ αν $\eta\mu t=x \Rightarrow \frac{x^2+2x}{(x-1)^2}=\kappa$

Και επειδή η τυχούσα παράλληλη προς τον x'x είναι $y=\kappa$,

για $\kappa<-\frac{1}{3}$ καμμία λύση $-\frac{1}{3}<\kappa<-\frac{1}{4}$ 4 λύσεις,

$\kappa=-\frac{1}{3}$ διπλή λύση, $\kappa=-\frac{1}{4}$ δύο λύσεις $\kappa>-\frac{1}{4}$ δύο λύσεις.

Αν t_1 ,t_2 είναι συμπληρωματικές λύσεις $\eta\mu^2 t_1+\eta\mu^2 t_2=1$ αν θέσω $\eta\mu t=x$ τότε ψάχνουν τις τιμές του κ για τις οποίες $\eta(\kappa-1)x^2-2(\kappa+1)x+\kappa=0$ έχει δύο λύσεις

με άθροισμα τετραγώνου 1. δηλ. $S^2-p=1 \Rightarrow \kappa^2+12\kappa+3=0$

$\kappa'=-6+\sqrt{33}$ $\kappa''=-6-\sqrt{33}$. Η χ'' απορίπτεται αφού για $\kappa<-\frac{1}{3}$ δεν είχαμε λύση. Η πρώτη δεκτή.

4. $\alpha=\pm\frac{3}{2}$)

ΤΕΛΟΣ

5 - ΦΕΒ. 1995

$$εφα.εφβ.εφγ=\frac{ρ(ρ^2-3)}{1-3ρ^2}= -εφω$$

γ. Εχουμε τη σχέση:(μπορεί να αποδεχτεί):

$$εφ(α+β+γ)=\frac{εφα+εφβ+εφγ-εφα.εφβ.εφγ}{1-(εφα.εφβ+εφβ.εφγ+εφγ.εφα)}$$

Επειδή $α+β+γ=ω+π$ έχω

$$εφω=\frac{3εφω+εφω}{1-S}\Rightarrow S=-3$$

3

Εστω η εξίσωση: $εφx-εφ3x=μεφ2x$

1. Να λυθεί για $μ=0$ και $μ=-1$
2. Να δειχτεί ότι γενικά η εξίσωση αυτή αναλύεται στις δύο εξισώσεις: $ημ2x=0$ και $2μσυν^2 2x+(μ+2)συν2x-μ=0$.
3. Να λύσετε γραφικά την δεύτερη εξίσωση χρησιμοποιώντας την καμπύλη της $y=\frac{-2x}{2x^2+x-1}$

(Ecole d'électricité industrielle de Paris)

ΛΥΣΗ

1. για $μ=0$ έχω $εφ3x=εφx$ $3x=κπ+x$ $x=κ\frac{π}{2}$

για $μ=-1$ έχω $εφx-εφ3x=εφ2x$ η $εφx+εφ2x=εφ3x$

με παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους έχω:

$$\frac{ημ3x}{συνxσυν2x}=\frac{ημ3x}{συν3x} \text{ ή } ημ3x(συν3x-συνx.συν2x)=0$$

η τελικά $ημx.ημ2x.ημ3x=0$ απ'όπου με μηδενισμό κάθε όρου έχω: $x=κπ$, $x=κ\frac{π}{2}$ $x=κ\frac{π}{3}$

2. Παραγοντοποιώντας το πρώτο μέλος της δοθείσας έχω

$$\frac{-\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 3x} = \mu\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} \quad \eta \quad (\mu\ \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 2x)\eta\mu 2x=0.$$

Αρα αυτή αναλύεται στις: (1) $\eta\mu 2x=0$ και (2) $\mu\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 2x=0$

Μετατρέποντας το $\sigma\upsilon\nu x.\sigma\upsilon\nu 3x$ σε άθροισμα έχω

$$\frac{\mu}{2}(\sigma\upsilon\nu 4x+\sigma\upsilon\nu 2x) + \sigma\upsilon\nu 2x=0 \quad \eta$$

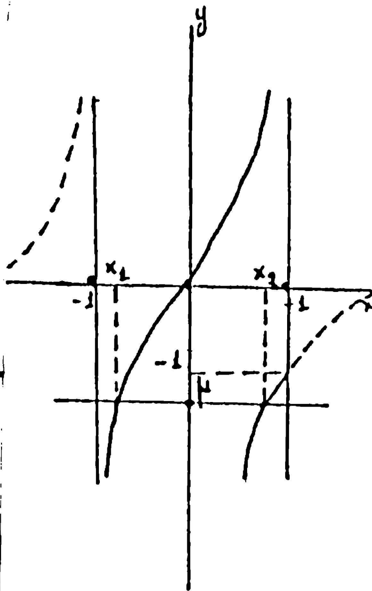
$$\mu\left[2\sigma\upsilon\nu^2 2x-1+\sigma\upsilon\nu 2x\right]+2\sigma\upsilon\nu 2x=0 \quad \delta\eta\lambda.$$

(3) $2\mu\sigma\upsilon\nu^2 2x+(\mu+2)\sigma\upsilon\nu 2x-\mu=0$

3. Για τη γραφική λύση της (3) θέτω $\sigma\upsilon\nu 2x=X$ και έχω το σύστημα: $2\mu X^2+(\mu+2)X-\mu=0$, $-1\leq X\leq 1$ που γράφεται ισοδύναμα σε

$$\frac{-2x}{2x^2+x-1}=\mu, \quad -1\leq x\leq 1 \qquad (4)$$

Κάτω απ' αυτή τη μορφή η γραφική λύση περιέχει τα σημεία της καμπύλης $y=\frac{-2x}{2x^2+x-1}$ (ενδιαφέρουν οι τετμημένες τους) με $-1\leq x\leq 1$ που συγχρόνως είναι σημεία της παράλληλης προς τον Οx, σε απόσταση μ. Απ' την ανάλυση, η γραφική της πρώτης του (4) δίνεται από τρείς κλάδους, απ' τους οποίους μας ενδιαφέρει αυτός με τετμημένες ανάμεσα στο -1 και 1.



Απ'τη γραφική λύση φαίνεται ότι αν $\mu \leq -1$ έχουμε δύο λύσεις X_1 X_2 (για $\mu=-1$ έχω $X_1=-\frac{1}{2}$ $X_2=1$).

Αν $\mu > -1$ έχουμε μια λύση.

Για να επανέλθουμε στην εξίσωση (3) ονομάζουμε Φ_1 $(0<\varphi_1<\pi)$ το τόξο ώστε $\sigma\upsilon\nu\varphi_1=X_1$ και όταν $\mu \leq -1$ με φ_2 $(0<\varphi_2<\frac{\pi}{2})$ ώστε $\sigma\upsilon\nu\varphi_2=X_2$

Αν $\mu \leq -1$ η (3) αναλύεται στις $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\varphi_1$ και $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\varphi_2$ με λύσεις τις $x=\pm\frac{\Phi_1}{2}+\kappa\pi$ και $x=\pm\frac{\Phi_2}{2}+\kappa\pi$

Για $\mu=-1$ έχουμε $\Phi_1=\frac{2\pi}{3}$ $\Phi_2=0$ και οι λύσεις ειναι

$x=\kappa\frac{\pi}{3}$ και $x=\kappa\pi$.)

Αν $\mu > -1$ η (3) γίνεται $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\varphi_1$ και οι λύσεις είναι $x=\pm\frac{\Phi_1}{2}+\kappa\pi$ (για $\mu=0$, $X_1=0 \Rightarrow \Phi_1=\pi \Rightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}$).

4

1. Να δειχτεί ότι: $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$.

2. Γενικά να δειχτεί ότι η παράσταση $P=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{\nu}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\sigma\upsilon\nu 2^{\mu-1}\frac{\pi}{\nu}$ ισούται με $\pm\frac{1}{2^{\mu}}$ όταν $\mu,\nu,\in N$

(Ecole superieure des sciences économiques)

ΛΥΣΗ

1. Έχω $P=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}.\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}$

$8P\eta\mu\frac{\pi}{7}=(2\eta\mu\frac{\pi}{7}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}).\,4\sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi}{7}\,\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}=\eta\mu\,\frac{2\pi}{7}\cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot$

$\cdot\,\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}=(2\eta\mu\frac{2\pi}{7}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7})2\sigma\upsilon\nu\,\frac{4\pi}{7}=\eta\mu\frac{4\pi}{7}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}=\eta\mu\,\frac{8\pi}{7}=-\eta\mu\frac{\pi}{7}$

άρα $8P=-1 \Rightarrow P=-\frac{1}{8}$.

2. Γενικά πολ/ζω τα δύο μέλη της $\rho=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{\nu}.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}..\sigma\upsilon\nu 2^{\mu-1}\frac{\pi}{\nu}$
με τον όρο $\Rightarrow 2^{\mu}P.\eta\mu\frac{\pi}{\nu}=2^{\mu}\eta\mu\frac{\pi}{\nu}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{\nu}\,\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{\nu}\ldots\sigma\upsilon\nu 2^{\mu-1}\frac{\pi}{\nu}$.
Κάνοντας τις αναγωγές όπως προηγουμένως καταλήγουμε
στην $2^{\kappa}P\,\eta\mu\,\frac{\pi}{\nu}=\eta\mu 2^{\mu}\,\frac{\pi}{\nu}$ (1)

Εξετάζω τώρα, σε ποιές περιπτώσεις ισχύει η σχέση
$\eta\mu 2^{\kappa}\,\frac{\pi}{\nu}=\pm\eta\mu\frac{\pi}{\nu}$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. $2^{\mu}\,\frac{\pi}{\nu}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{\nu}$ $\quad 2^{\mu}=2\kappa\nu\pm 1$ η οποία είναι αδύνατη

στο σύνολο των φυσικών (το πρώτο μέλος άρτιο το β' περιττό)

2. $2^{\mu}\,\frac{\pi}{\nu}=2\kappa\pi+\pi\pm\frac{\pi}{\nu}$ $\quad 2^{\mu}\pm 1=\nu(2\kappa+1)$. Αυτή ισχύει

για οποιοδήποτε μ, αρκεί να διαλέξουμε τον ν διαιρέτη του $2^{\mu}\pm 1$. Δηλαδή απ την (1) έχω: $P=\pm\frac{1}{2^{\mu}}$

5

Δίνεται το πολυώνυμο
(1) $R=[x-\tau\sigma\upsilon\nu\alpha]\,[x-\tau\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\pi}{3})]\,[x-\tau\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{4\pi}{3})]$ όταν

τ και α είναι σταθερές (τ>ο). 1. Να δειχτεί ότι το R γράφεται στην μορφή (2) $R=x^3+px+q$ και να εκφραστούν

τα p και q συναρτήσει των τ και α.

2. Αντίστροφα αν το R δίνεται με τη μορφή (2) να δείξετε ότι τα p και q, πρέπει να πληρούν μια σχέση, που να καθορίσετε, για να τίθεται το R υπό μορφή (1).

3. Απ'τα προηγούμενα να βρεθούν οι ρίζες της $x^3-12x-12=0$ υπολογίζοντας τα τ και α.

4: Το πολυώνυμο (1) μηδενίζεται για τρείς τιμές x_1, x_2, x_3. Να βρεθεί ο χώρος στο επίπεδο XOΨ των σημείων M(X,Ψ) οπόυ X=τσυνα Ψ=τημα, ώστε οι τρείς ρίζες x_1, x_2, x_3 να βρίσκονται ανάμεσα στο -1 και 1.

(Bacc.D.Amiens)

ΛΥΣΗ

1. $R=x^3-\tau\left[\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{4\pi}{3})\right]x^2+\tau^2\left[\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{\pi}{3})+\right.$

$\left.+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\pi}{3})\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{4\pi}{3})+\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{4\pi}{3})\right]x-\tau^3\sigma\upsilon\nu\alpha.\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\pi}{3})$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{4\alpha}{3})$.

Ο συντελεστής του x^2 όμως, η αγκύλη, ισούται με 0, και ο συντελεστής -αγκύλη- του x με $-\frac{3}{4}$, ο δε συντελεστής του τ^3 ισούται με $\frac{1}{4}$ συν3α

Π.χ. $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\pi}{3})\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha+\frac{4\pi}{3})=$

$=\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(2\alpha+\frac{2\pi}{3})+\sigma\upsilon\nu\ \frac{2\pi}{3}\right].\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{4\pi}{3})=$

$=\frac{1}{4}\left[\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\frac{2\pi}{3})+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\pi}{3})\right]=\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu3\alpha$.

Εχουμε λοιπόν $R=x^3-\frac{3\tau^2}{4}x-\frac{\tau^3}{4}$ συν3α άρα

$$p=-\frac{3\tau^2}{4} \quad q=-\frac{\tau^3}{4}\text{συν}3a$$

2. Οι προηγούμενες σχέσεις αν αντιστραφούν θα δώσουν τα τ και α, συναρτήσει των p,q

Εχω $\left.\begin{array}{l}\tau^2=-\frac{4p}{3}\\ \tau^3\,\text{συν}3a=-4q\end{array}\right\}$ Η πρώτη έχει νόημα μόνο όταν $p<0$ και δίνει $\tau=\sqrt{-\frac{4p}{3}}$

Η δεύτερη εξίσωση υπάρχει όταν

$$\left|-\frac{4q}{\tau^3}\right|\leq 1 \quad ή \quad \frac{16q^2}{\tau^6}\leq 1 \quad ή. \quad 16q^2\leq -\frac{64p^3}{27} \text{ (μέσω της } \tau=\sqrt{-\frac{4p}{3}}\text{)}.$$

Αρα πρέπει $4p^3+27q^2\leq 0$(3) Αυτη είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να τεθεί το πολυώνυμο απ τη μορφή (2) στην (1).Αν πληρείται αυτή τότε τα τ και α δίνονται από τις (4) $\tau=\sqrt{-\frac{4p}{3}}$, $\text{συν}3a=\frac{3p}{q}\sqrt{-\frac{3}{4p}}=\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}$ με

$0\leq 3a\leq \pi$.

3. Εδώ $p=-12$ $q=-12$.Η συνθήκη (3) πληρείται και οι (4) δίνουν $\tau=\sqrt{16}=4$ και $\text{συν}3a=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$.Οι ρίζες x_1,x_2,x_3 είναι $x_1=\tau\text{συν}a=4\text{συν}a$, $x_2=4\text{συν}(a+\frac{2\pi}{3})$ $x_3=4\text{συν}(a+\frac{4\pi}{3})$.

Επειδή $\text{συν}3a=\frac{3}{4}$ $\dot{\eta}$ $a\simeq 13^0\ 50'$(από πίνακες)

Ετσι κατά προσέγγιση υπολογίζω τις x_1,x_2,x_3.

4. $x_1=\tau\text{συν}a=X$

$x_2=\tau\text{συν}(a+\frac{2\pi}{3})=-\frac{\tau}{2}(\text{συν}a+\sqrt{3}\text{ημ}a)=-\frac{1}{2}(X+Y\sqrt{3})$

$x_3=\tau\text{συν}(a+\frac{4\pi}{3})=-\frac{\tau}{2}(\text{συν}a-\sqrt{3}\text{ημ}a)=-\frac{1}{2}(X-Y\sqrt{3})$

δηλ. $-1\leq X\leq 1$, $-1\leq -\frac{1}{2}(X+Y\sqrt{3})\leq 1$

$-1\leq -\frac{1}{2}(X-Y\sqrt{3})\leq 1.$

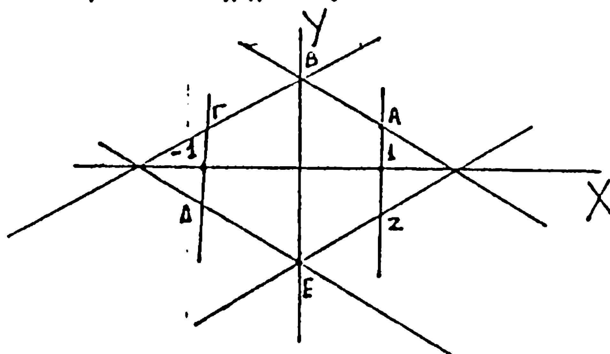
Αρα $-1 \le x \le 1$ $\quad x+\psi\sqrt{3}-2 \le 0$ $\quad x+\psi\sqrt{3}+2 \geq 0$

$x-\psi\sqrt{3}-2 \le 0$ $\quad x-\psi\sqrt{3}+2 \geq 0$.

Αν λοιπόν κατασκευάσουμε τις ευθείες με εξισώσεις

$x=\pm 1$ $\quad x+\psi\sqrt{3}=\pm 2$ $\quad x-\psi\sqrt{3}=\pm 2$

τα σημεία Μ βρίσκονται στο εσωτερικό του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος.



6

Να δειχτεί ότι υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί x, που πληρούν τη σχέση $|\eta\mu 2x| = \frac{1}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Στη συνάχεια να υπολογιστούν τα ημίτονα και συνημίτονα των αριθμών αυτών.

(Classes de premiere C,P,E).

ΛΥΣΗ

Η $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ γράφεται $\pi < 2x < 2\pi$. Θέτω $2x=\kappa$ και έχω την

$|\eta\mu\kappa| = \frac{1}{3}$ με $\pi < \kappa < 2\pi$. Οι ευθείες $y=\frac{1}{3}$ και $y= -\frac{1}{3}$

τέμουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα Α,Β η πρώτη και στα Γ,Δ η δεύτερη. Τα τέσσερα αυτά σημεία είναι πέρατα τόξων που πληρούν την $|ημκ|=\frac{1}{3}$, επειδή όμως πρέπει $π<κ<2π$, τα μοναδικά σημεία είναι τα Γ και Δ, άρα υπάρχουν δύο αριθμοί που πληρούν τα δεδομένα.

Εστω $2x'$ και $2x''$ οι κυκλικές τετμημένες των σημείων Γ και Δ, που βρίσκονται στο $(π,2π)$.

Πρέπει να υπολογίσουμε τα $ημx', συνx', ημx'', συνx''$.

Λόγω συμμετρίας στο σχήμα ισχύει

$$\frac{2x'+2x''}{2}=\frac{3π}{2} \Rightarrow x'+x''=\frac{3π}{2}$$

δηλ. $ημx''=ημ(\frac{3π}{2}-x')=-συνx'$,

$$συνx''=συν(\frac{3π}{2}-x')=-ημx'.$$

Θα υπολογίσουμε λοιπόν τα $ημx', συνx'$.

Επειδή $2x'\in(π,\frac{3π}{2}) \Rightarrow ημ2x'<0$ αλλά $ημ2x'=-\frac{1}{3}$

$συν2x'=-\sqrt{1-ημ^2 2x'}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Επίσης $συν2x'=1-2ημ^2x'$

$ημx'=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ (το $x'\in(\frac{π}{2},\frac{3π}{4})$).

Το $συνx'=\frac{ημ2x'}{2ημx'}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ άρα $ημx''=-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$$συνx''=-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}.$$

7

Εστω $εφχ=\frac{2β}{α-γ}$.Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$y=ασυν^2χ+2βημχσυνχ+γημ^2χ$

$z=αημ^2χ-2βημχ.συνχ+γσυν^2χ.$

Λ Υ Σ Η

Θα υπολογίσουμε τα y+z, και y-z

$y+z=α(συν^2χ+ημ^2χ)+γ(ημ^2χ+συν^2χ)=α+γ$

$y-z=(α-γ)συν2χ+2βημ2χ$.Αυτή η τελευταία έκφραση μπορεί ακόμα να γραφεί:

$$y-z=(α-γ)\left[συν2χ+\frac{2β}{α-γ}ημ2χ\right]$$

ή

$$y-z=(α-γ)(συν2χ+εφχημ2χ)=$$
$$=(α-γ)\frac{συν2χ.συνχ+ημχ.ημ2χ}{συνχ} \quad ή$$

$$y-z=(α-γ)\frac{συν(2χ-χ)}{συνχ}=(α-γ)\frac{συνχ}{συνχ}=α-γ$$

δηλ. τελικά $y+z=α+γ \Rightarrow y=α$

$y-z=α-γ \Rightarrow z=γ$

8

Δίδεται ορθογώνιο σύστημα αναφοράς χογ , και ένας κύκλος, κέντρου Ο και ακτίνας R .Εστω, πάνω στο κύκλο, ένα σημείο Μ που ορίζεται απ'τη γωνία α=(Οχ,ΟΜ).
Οι ορθές προβολές του Μ, πάνω στους Οχ, και Οy είναι τα P και Q αντίστοιχα.

1. Να υπολογιστεί η γωνία α, ώστε $3\overline{OP}+4\overline{OQ}=R$

2. Θεωρώ την ευθεία PQ. Αυτή τέμνει την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\widehat{XOM}$, στο σημείο I. Να υπολογιστεί η α, ώστε $O\Gamma=\frac{R}{2}$. (ΟΓ η τετμημένη του I).

(Bacc.A,B Toulouse)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $\overline{OP}=R\text{συν}\alpha$ $\overline{OQ}=R\text{ημ}\alpha$ άρα η δοθείσα σχέση γράφεται $3\text{συν}\alpha+4\text{ημ}\alpha=1$ ή $\text{συν}\alpha+\frac{4}{3}\text{ημ}\alpha=\frac{1}{3}$ και θέτοντας $\text{εφ}\varphi=\frac{4}{3}$

$(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ (απ' την οποία παίρνουμε $\text{συν}\varphi=\frac{3}{5}$) έχω:

$(\text{συν}\alpha.\text{συν}\varphi+\text{ημ}\alpha.\text{ημ}\varphi)=\frac{1}{3}\text{συν}\varphi=\frac{1}{5}$ δηλ.

$\text{συν}(\alpha-\varphi)=\frac{1}{5}$ ή

$\text{συν}(\alpha-\varphi)=\text{συν}\theta$ όπου $\text{συν}\theta=\frac{1}{5}$ και $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

άρα $\alpha-\varphi=\theta$ η $\alpha=\alpha_0=\varphi+\theta$ | περιορίζω τις τιμές
η $\alpha-\varphi=-\theta$ η $\alpha=\alpha_1=\varphi-\theta$ | του α από $-\pi$ έως $+\pi$.

2. Η ευθεία PQ έχει εξίσωση : $\frac{x}{R\text{συν}\alpha}+\frac{y}{R\text{ημ}\alpha}=1$

Και η διχοτόμος της $\widehat{XOM}$: $y=x\,\text{εφ}\frac{\alpha}{2}$.

Αρα η τετμημένη του κοινού τους σημείου I θα προκύπτει από την απαλοιφή του μεταξύ των δύο προηγούμενων εξισώσεων (λύση συστήματος):

$$\frac{x}{R\text{συν}\alpha}+\frac{x\,\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}{R\text{ημ}\alpha}=1 \quad \text{η} \quad x\left[\frac{1}{\text{συν}\alpha}+\frac{1}{2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}}\right]=R$$

ή $x\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}\right]=R$ η $x=\frac{R\,(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu\alpha}$ Πρέπει

λοιπόν να ισχύει $\frac{R(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{R}{2}$ η $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$ η

$\sigma\upsilon\nu\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.Δηλ. οι πιθανές τιμές του α είναι

$\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ $\alpha=\frac{7\pi}{4}$.Τα σημεία Μ αντιστοιχούν στις κορυφές ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο Ο, με διαγωνίους τις διχοτόμους των γωνίων που σχηματίζουν οι άξονες.-

9

Εστω Α,Β,Γ γωνίες τριγώνου:

1. Να δειχτεί η σχέση $\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$

2. Αν ισχύουν: $\sigma\upsilon\nu A=\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta$ $\sigma\upsilon\nu B=\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\varepsilon\varphi\gamma.\varepsilon\varphi\alpha$ να δειχτεί ότι: $\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\gamma=1$

(Concours général des Lycées et Collèges) .

ΛΥΣΗ

1. $A+B+\Gamma+=\pi$ $A+B=\pi-\gamma$ $\sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$

$\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu A\eta\mu B$ $(\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)^2=(1-\sigma\upsilon\nu^2 A)(1-\sigma\upsilon\nu^2 B)$

$\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$.

2. Η ρποηγούμενη σχέση, αν αντικοστήσω τις τιμές που δίνονται για τα συνΑ,συνΒ,συνΓ γράφεται:

$$\frac{\eta\mu^2\alpha.\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha.\sigma\upsilon\nu^2\beta}+\frac{\eta\mu^2\beta.\eta\mu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\beta.\sigma\upsilon\nu^2\gamma}+\frac{\eta\mu^2\gamma.\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma.\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\frac{2\eta\mu^2\alpha.\eta\mu^2\beta.\eta\mu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha.\sigma\upsilon\nu^2\beta.\sigma\upsilon\nu^2\gamma}=1$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και μετατρέποντας όλους τους αριθμούς σε ημίτονα μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει η ζητούμενη.

10

Δίδεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας , και μια εφαπτόμενη ευθεία xx'στον κύκλο στο σημείο Α. Εστω Β, το αντιδιαμετρικό σημείο του Α και Μ ένα σημείο του κύκλου, που ορίζεται απ'τη σχέση $\widehat{ABM}=a$. Οι ΒΜ και ΟΜ τέμουν την xx'αντίσοιχα στα Κ και Ι.

Να υπολογιστεί συναρτήσει του και της $\varepsilon\varphi a=t$ το μήκος των τμημάτων ΑΚ,ΑΙ,ΙΚ,ΟΙ για $a>\frac{\pi}{4}$ και για $a<\frac{\pi}{4}$.

Τι συμβαίνει όταν $a=\frac{\pi}{4}$;

(Bacc. 1ere partie, sèries A et C,Antilles et Guyane)

ΛΥΣΗ

Το ΒΟΜ τρίγωνο ισοσκελές, και η $\widehat{BOM}=\pi-2a$.

Αυτή η γωνία είναι λοιπόν αμβλεία όταν $a<\frac{\pi}{4}$, ορθή αν $a=\frac{\pi}{4}$ και οξεία όταν $a>\frac{\pi}{4}$

Και στις τρείς περιπτώσεις, το μήκος του ΑΚ είναι

$AK=AB\varepsilon\varphi a=2Rt$

Οταν $a<\frac{\pi}{4}$ η $\widehat{AOI}=2a$.Τότε απ'το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΙ έχω $AI=OA\varepsilon\varphi 2a=R\frac{2t}{1-t^2}$ και

$OI=\frac{OA}{\sigma\upsilon\nu 2a}=R\frac{1+t^2}{1-t^2}$ Τελικά $KI=AI-AK=$

$=2Rt\left[\frac{1}{1-t^2}-1\right]=\frac{2Rt^3}{1-t^2}$

Στην περίπτωση που $\alpha=\frac{\pi}{4}$ το σημείο Ι δεν υπάρχει .
Αν $\alpha>\frac{\pi}{4}$ η $\widehat{AOI}=\pi-2\alpha$. Απ το τρίγωνο ΑΟΙ έχουμε
$AI=AO\varepsilon\varphi(\pi-2\alpha)=-R\ \varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2Rt}{t^2-1}$ και

$$OI=\frac{OA}{\sigma\upsilon\nu(\pi-2\alpha)}=\frac{-R}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=R\,\frac{1+t^2}{t^2-1}$$

Επίσης $IK=AI+AK=2Rt\left(\frac{1}{t^2-1}+1\right)=\frac{2Rt^3}{t^2-1}$

. 11

Δίδεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=2R και κέντρου Ο. Εστω Μ μεταβλητό σημείο πάνω στο ημικύκλιο, και θέτουμε ($\widehat{BAM}=2x$). Εστω επίσης κύκλος κέντρου Ι, εσωτερικός του ημικυκλίου που εφάπτεται της ΑΒ στο Η, του τόξου ΒΜ στο Τ και της ΑΜ στο Ν. Εστω τ η ακτίνα του αυτού του κύκλου.

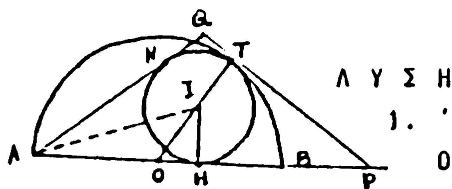
1. Να υπολογιστούν τα ΙΗ,ΟΗ,ΟΙ συναρτήσει των ΑΗ, R και χ και να δειχτεί ότι $\tau=2R\ \varepsilon\varphi\ x(1-\varepsilon\varphi x)$
Ποιό είναι το μέγιστο του τ;

2. Η εφαπτόμενη στο Τ του ημικυκλίου τέμνει την ΑΒ στο Ρ και την ΑΜ στο Q. Αν η θετική κατεύθυνση είναι η απ'το Α στο Β να υπολογιστεί η $y=\overline{AP}$ συναρτήσει του R και του εφχ.

3. Το τρίγωνο APQ μπορεί να γίνει ορθογώνιο; Να υπολογιστούν οι πλευρές και οι γωνίες του τριγώνου APQ όταν QA=QP

4. Αν Η είναι το μέσο του ΟΒ, να υπολογιστούν

τα εφx, τ, $\overline{AP}$ οι εφαπτόμενες των γωνιών του τριγώνου ΑΡQ, καθώς και οι πλευρές αυτού του τριγώνου.
(Ecole Superieure de Céramique Industrielle de Sèvres)



ΛΥΣΗ

1. Έχουμε $\tau = IH = AH\varepsilon\varphi x$, $OH = AH - R$
$OI = OT - IT = R - \tau = R - AH\,\varepsilon\varphi x$

Σχέση μεταξύ των R, r, x

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΙΗ δίνει $OI^2 = OH^2 + IH^2$ δηλ. $(R-\tau)^2 = (AH-R)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\tau}{\varepsilon\varphi x} - R\right)^2 + \tau^2$. Μετά τις πράξεις έχουμε $-2Rr = \frac{\tau^2}{\varepsilon\varphi^2 x} - \frac{2Rr}{\varepsilon\varphi x}$ ή $\frac{\tau}{\varepsilon\varphi^2 x} = 2R\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi x} - \right|$

ή τελικά $\tau = 2R(1-\varepsilon\varphi x)\varepsilon\varphi x$. Για το μεγιστο του, rπαρατηρώ ότι οι δύο όροι $1-\varepsilon\varphi x, \varepsilon\varphi x$, του γινομένου έχουν σταθερό άθροισμα $=1$. Αρα έχω μέγιστο όταν $1-\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x$ $\varepsilon\varphi x = \frac{1}{2}$. Αρα το $\tau_{max} = \frac{R}{2}$ και συμβαίνει όταν το Η είναι στο Ο.

2. Εχουμε $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PT}^2 = \overline{PH}^2$
δηλ. $\overline{AP}(\overline{AP} - \overline{AB}) = (\overline{AH} - \overline{AB})^2$
ή $\overline{AP} = \frac{\overline{AH}^2}{2\overline{AH} - 2R}$. Επειδή $\overline{AH} = 2R(1-\varepsilon\varphi x)$ έχουμε

$$y = \overline{AP} = \frac{4R^2(1-\varepsilon\varphi x)^2}{4R(1-\varepsilon\varphi x) - 2R} = 2R\frac{(1-\varepsilon\varphi x)^2}{1-2\varepsilon\varphi x}$$

3. Αν το ΑΡQ είναι ορθογώνιο δεν μπορεί να είναι στο Q
Θα έπρεπε τότε ΟΤ//ΟΗ οποότε $\widehat{OIA} = \widehat{IAM} = x$ δηλ. $OI = R$

Το σημείο I λοιπόν θα βρίσκονταν στο B και το τρίγωνο APQ δεν θα υπήρχε.

Αν το APQ είναι ισοσκελές και το H μέσον του AP, τότε : $AP=2AH=\frac{2\tau}{\varepsilon\varphi x}$ δηλ. $\frac{2R(1-\varepsilon\varphi x)^2}{1-2\varepsilon\varphi x}=4R(1-\varepsilon\varphi x)$

Αν απορρίψουμε τη λύση $\varepsilon\varphi x=1$ δηλ. $x=\frac{\pi}{4}$ για την οποία το τρίγωνο APQ δεν υπάρχει,(το M βρίσκεται στο A) προκύπτει ότι $1-\varepsilon\varphi x=2(1-2\varepsilon\varphi x)\Rightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{1}{3}$ ή $x\approx 18^o\ 26'$

άρα $\hat{A}=\hat{P}=36^o, 52'$ $\hat{Q}=106^o\ 16'$

Εχουμε επίσης $AP=2R\frac{(1-\frac{1}{3})^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{8R}{3}$

$QA=QP\frac{AH}{\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{4R}{3\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{4R}{3}\cdot\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{1-\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{5R}{3}$

4. Αν το H είναι μέσο του OP έχουμε $AH=\frac{3R}{2}$ ή $\tau=\frac{3R}{2}\varepsilon\varphi x$

Εχουμε λοιπόν την $\frac{3R}{2}\cdot\varepsilon\varphi x=2R(1-\varepsilon\varphi x)\varepsilon\varphi x$ όπου απορρίπτοντας την $\varepsilon\varphi x\neq 0$, παίρνουμε την $\varepsilon\varphi x=\frac{1}{4}$ έχουμε $\tau=2R(1-\frac{1}{4})\frac{1}{4}=\frac{3R}{8}$

και $\overline{AP}=2R\frac{(1-\frac{1}{4})^2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{9R}{4}$

Ετσι να υπολογίσω μόνο την εφP. Υπολογίζω πρώτα την $\varepsilon\varphi\frac{P}{2}$.

Είναι $\varepsilon\varphi\frac{P}{2}=\frac{\tau}{\overline{HP}}=\frac{\tau}{\overline{AP}-\overline{AH}}=\frac{3R/8}{3R/4}=\frac{1}{2}$

άρα $\varepsilon\varphi P=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{P}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{P}{2}}=\frac{4}{3}$.Ομοίως έγω για τα ημίτονα

π.χ. $ημP = \dfrac{2εφ\frac{P}{2}}{1+εφ^2\frac{P}{2}} = \dfrac{4}{5}$ και απ το νόμο των ημιτόνων βρίσκω τις άλλες πλευρές.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

1. Εστω ότι σε τρίγωνο ισχύει

$2εφA = εφB + εφΓ \quad (0 < A < \frac{\pi}{2})$

Να δειχτεί ότι η προηγούμενη σχέση συνεπάγεται τις:

$εφB . εφΓ = 3$ και $συν(B-Γ) = 2συνA$

(Sujet de concours école Breguet)

2. Δίνεται η εξίσωση

$x^2 - 2συνφ . x + (2-\sqrt{3})(1-4ημ^2φ) = 0$

όπου $0 < φ < 2\pi$.

1. Να μελετηθεί το πλήθος και το πρόσημο των ριζών.
2. Εστω η γωνία $x\hat{O}y = \frac{\pi}{6}$. Στη περίπτωση που οι ριζες της εξίσωσης είναι θετικές, ονομάζουμε A και B, τα σημεία των Ox, Oy αντίστοιχα έτσι ώστε $OA = x'$ και $OB = x''$. Να υπολογιστεί το AB καθώς και η ακτίνα του περιγραμένου κύκλου στο τρίγωνο AOB.

(Sujet de concours, école Breguet)

3. Εστω φ, ω είναι δύο γωνίες που πληρούν τις

$-\frac{\pi}{2} \leq φ \leq \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq ω \leq \frac{\pi}{2}$ και $h \in R$

Θέτουμε το συστήμα S: $\begin{cases} 4ημφσυνω - 5(ημφ + συνω) + 4 = 0 \\ ημφ . συνω - (ημφ + συνω) + \frac{1}{4h} + 1 = 0 \end{cases}$

Να σχηματιστεί εξίσωση β'βαθμού που να δέχεται για ρίζες τα ημφ και συνω.

Να βρεθεί ο αριθμός των λύσεων του συστήματος και τα πρόσημά τους.

Μελετήστε ειδικά την περίπτωση οπου $h = -1$

(Bacc. tech. éco. France metrop.)

4. Εστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=α) και έστω $\hat{B}=\hat{\Gamma}=3\theta$. Στο εσωτερικό του τριγώνου, φέρνουμε από κάθε κορυφή δύο ημιευθείες, οι οποίες τριχοτομούν κάθε γωνία του. Μεταξύ των σημείων τομής των ημιευθειών αυτών σημειώνω τα Α',Β',Γ', που είναι τα εξής:

$$A'\begin{cases}B\Gamma A'=\theta\\ \Gamma BA'=\theta\end{cases}\qquad B'\begin{cases}A\Gamma B'=\theta\\ \Gamma AB'=\frac{\hat{A}}{3}\end{cases}\qquad \Gamma'\begin{cases}AB\Gamma'=\theta\\ BA\Gamma'=\frac{\hat{A}}{3}\end{cases}$$

1. Εστω Ι το μέσο της ΒΓ. Να εκφραστούν συναρτήσει των α και θ τα μήκη ΑΙ και Α'Ι. Απ'τις εκφράσεις που θα προκύψουν να δειχτεί: $AA'=2\alpha\eta\mu\theta$

2. Να δειχτεί: $AB'=A\Gamma'=\dfrac{\alpha\eta\mu\theta}{\eta\mu(\frac{\pi}{3}-\theta)}$

3. Εστω Η το μέσο του Β'Γ'. Να υπολογιστούν συναρτήσει του θ οι λόγοι $\dfrac{HB'}{AB'}$, $\dfrac{HA'}{AB'}$. Απ'τις εκφράσεις που θα προκύψουν να διεχτεί ότι ο λόγος $\dfrac{HA'}{HB'}$ έχει τιμή ανεξάρτητη του θ, και ότι το Α'Β'Γ' είναι ισόπλευρο

(Bacc.math. France mètro. et Alger).

5. Να λυθεί η εξίσωση: συν3x=ημ2x (Ε). Να σημειωθούν στον τριγ. κύκλο οι λύσεις της (Ε). Ποιές είνια οι λύσεις της (Ε) στο $[-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$;

(Classes de premiere)

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi)=\frac{2\chi-7}{\chi^2-2\chi-3}$. Ονομάζουμε C, την καμπύλη της F.

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της F, και να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης Δ, της C, στο σημείο με τετμημένη 1. Χαράξτε τις C και Δ.

β. Να προσδιοριστούν τα α και β εR : $F(\chi)=\frac{2\chi-2}{\chi^2-2\chi-3}+\frac{\alpha}{\chi+1}+\frac{\beta}{\chi-3}$. Να υπολογιστεί η αρχική Σ(χ) της F, στο διάστημα $(3,+\infty)$. Ομοίως το $\lim_{\alpha} \Sigma(\chi)$. Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται στις ευθείες: ψ=0, χ=7/2, χ=5

γ. Εστω η $G(\chi)=\frac{2|\chi|-7}{\chi^2-2|\chi|-3}$

Δείξτε ότι η G είναι άρτια. Χρησιμοποιώντας την C χαράξτε την καμπύλη Γ, της G.

δ. Θεωρούμε την ευθεία $D_\mu=\mu/2(2\chi-7)$. Να βρεθεί το πλήθος των κοινών σημείων της C και της D_μ, για τα διάφορα μ.

ε. Εστω Μ, κινητό σημείο στο επίπεδο, που οι συντεταγμένες του, συναρτήσει του χρόνου t, είναι $\chi=3+e^t$ $\psi=-\frac{2-e^{-t}}{4+e^t}$. Δείξτε ότι η τροχιά του Μ, είναι τμήμα της C. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος της ταχύτητας του Μ, κατά τη χρονική στιγμή t.

(BACC/ SERIE MATHEMATIQUES ALGERIEN)

---

2. Δίνεται η $F(\chi)=\chi+\sqrt{\chi^2+\chi+1}$

α. Να δειχτεί ότι η F είναι γνησιως αύξουσα. Μελετήστε τις μεταβολές της και χαράξτε την αντίστοιχη καμπύλη C_F.

Δείξτε ότι η C_F δέχεται δύο ασύμπτωτες τις $\psi=-1/2$ και $\psi=2\chi+1/2$

β. Εστω C΄ η συμμετρική καμπύλη της C_F, με άξονα συμμετρίας την ευθεία $\psi=\chi$. Κατασκευάστε την C΄ και δείξτε ότι η C΄ παριστάνει μια συνάρτηση $F_1(\chi)=-\frac{\chi^2-1}{2\chi+1}$.

γ. Να προσδιορίστε τα α, β, γ ώστε να ισχύει $\frac{\chi^2-1}{2\chi+1}=\alpha\chi+\beta+\frac{\gamma}{2\chi+1}$

δ. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_1^{1+\sqrt{3}}\frac{\chi^2-1}{2\chi+1}d\chi$

ε. Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται $0\leq\chi\leq1$ και $F(\chi)\leq\psi\leq F(1)$

B. Εστω $G(\chi)=\ln F(\chi)$

α. Μεταβολές και καμπύλη C_G της $G(\chi)$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_G στο σημείο με τετμημένη 0. (μηδέν)

β. Δείξτε ότι η G είναι " I-I και επί " του $(-1,\infty)$ στο R. Να βρεθεί η G^{-1}

γ. Εστω (α_ν) η ακολουθία που ορίζεται:

$\alpha_0=1,\ \alpha_{\nu+1}=G(\alpha_\nu)+1$ Δείξτε ότι η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω απ΄το 3, να εξαχθεί ότι είναι και συγκλίνουσα.

δ. Εστω (υ_ν) η ακολουθία:

$\upsilon_\nu=\int_\nu^{\nu+1}(G(t)-\ln(t))dt$. Για $t>0$, και γράφοντας $G(t)-\ln(t)=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)$ δείξτε ότι η συνάρτηση $G(t)-\ln(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Να εξαχθεί ότι η (υ_ν) συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό, ο οποίος να προσδιοριστεί.

(SERIE C. TOULOUSE 1984)

3. Εστω η $F(\chi)=\sqrt{\frac{1-\chi}{2}}$

α. Μελέτη της F, γραφική της παράσταση, εξίσωση εφαπτομένης στο $\chi_0=1$

β. Δείξτε ότι η καμπύλη C της F, και η συμμετρική της ως προς τον χχ' αποτελούν μια παραβολή, της οποίας να βρεθούν η κορυφή, η εστίες και η διευθετούσα.

γ. Να δειχτεί ότι η καμπύλη C, δέχεται σε κάθε σημείο της M, μία εφαπτομένη. Αυτή τέμνει τον Οχ σ'ένα σημείο T. Εστω H η ορθή προβολή του M πάνω στον Οχ. Ονομάζουμε S, το σημείο (1,0). Να δειχτεί ότι το S είναι το μέσο του HT. Να εξαχθεί μια απλή κατασκευή της εφαπτομένης της C, στο τυχόν σημείο της.

δ. Υπολογίστε μια αρχική της F, στο $(-\infty,1]$ Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος που περικλείεται: $0\leq\chi\leq 1$

$-F(\chi)\leq\psi\leq F(\chi)$

B. Δίνεται η ακολουθία α_ν: $\alpha_0\in R$ και $\alpha_{\nu+1}=\sqrt{\frac{1-\alpha_\nu}{2}}$

1α. Να δειχτεί ότι η (α_ν) υπάρχει, αν και μόνο αν το $\alpha_0\in[-1,1]$. Υπολογίστε το α_0 ώστε η (α_ν), να είναι σταθερή.

2. Θεωρούμε $\alpha_0=\eta\mu\varphi_0$ με $\varphi_0\in[-\pi/2, +\pi/2]$

α. Δικαιολογίστε αυτή την εκλογή. Τι συμβαίνει όταν $\varphi_0=\pi/6$;

Αφού δειχτεί η σχέση $\sqrt{\frac{1-\eta\mu\alpha}{2}}=\eta\mu(\pi/4-\alpha/2)$ να εξακριβωθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\varphi_\nu\in[-\pi/2, \pi/2]$ τέτοιο ώστε $\alpha_\nu=\eta\mu\varphi_\nu$. Ποιά σχέση υπάρχει μεταξύ των $\varphi_{\nu+1}$ και φ_ν;

β. Θεωρούμε την ακολουθία (β_ν) : $B_\nu=\varphi_\nu-\pi/6$ Να δειχτεί ότι είναι μια γεωμ. πρόοδος.

(SERIE C LA REUNION)

I

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ- ΑΡΙΘΜΟΙ.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1 Να υπολογιστούν στο σύνολο C οι έκτης τάξης ρίζες της μονάδας, σε τριγωνομετρική και αλγεβρική μορφή.

2. Να υπολογιστεί το $(1-i)^6$. Να υπολογιστούν οι έκτης τάξης ρίζες του $8i$.

3. Απ' το δεύτερο ερώτημα να υπολογιστούν τα $συν\frac{\pi}{12}$ και $ημ\frac{\pi}{12}$

(BACC/ C. AMIENS)

ΛΥΣΗ

1. $x_1 = 1$, $x_2 = συν\frac{\pi}{3} + iημ\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = συν\frac{2\pi}{3} + iημ\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = -x_1 = -1$, $x_5 = -x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = -x_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2. Έχουμε $(1-i)^6 = 1+6(-i)+15(-i)^2+20(-i)^3+15(-i)^4+6(-i)^5$
$+(-i)^6 = 1-6i-15+20i+15-6i-1 = 8i$

Υπάρχουν 6 ρίζες έκτης τάξης του $8i$. Αν u είναι μία απ' αυτές, οι έξη αριθμοί είναι $u \times x_k$ με $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, όπου οι x_k είναι οι έκτης τάξης ρίζες της μονάδας.

Άρα $u_1 = 1-i$ $\quad u_2 = (1-i)\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$u_3 = (1-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \qquad u_4 = -u_1 = i-1$

$u_5 = -u_2 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \qquad u_6 = -u_3 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

3. Ο αριθμός $8i$ έχει μέτρο 8 και όρισμα $\frac{\pi}{2}+2k\pi$.
Οι έκτης τάξης ρίζες του έχουν μέτρο $\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$ και ορίσματα $\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}$. Μία απ' αυτές λοιπόν γράφεται: $\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{12}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{12}\right)$.
Επειδή $0 < \text{ημ}\frac{\pi}{12} < \text{συν}\frac{\pi}{12}$ αυτή η ρίζα είναι η u_2.

Άρα προκύπτει: $\text{συν}\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

και $\qquad \text{ημ}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

---

2 α. Να δειχτεί ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει:
$$1+2i+3i^2+\dots\dots+\nu i^{\nu-1} = \frac{-(\nu+1)i^{\nu+1}-\nu i^{\nu}+i}{2}$$

β. Ομοίως: $1-3+5-7+\dots\dots(2\kappa+1)(-1)^{\kappa} = (\kappa+1)(-1)^{\kappa}$
και $\quad 2-4+6-\dots 2\kappa(-1)^{\kappa-1} = \frac{1-(2\kappa+1)(-1)^{\kappa}}{2}$

(BACC. C. STRASBOURG)

ΛΥΣΗ.

α. Για ν=1 γίνεται $1=\frac{-2i^2-i+i}{2}$ που ισχύει.

Υποθέτω ότι ισχύει η $S_{\nu-1}=1+2i+3i^2+\dots(\nu-1)i^{\nu-2}=\frac{-\nu i^{\nu}-(\nu-1)i^{\nu-1}+i}{2}$

Αν ονομάσω S_ν την ζητούμενη σχέση τότε:
$S_\nu=S_{\nu-1}+\nu i^{\nu-1}=\frac{-\nu i^\nu+(\nu+1)i^{\nu-1}+i}{2}$

Η ισότης $-(\nu+1)i^{\nu+1}=-(\nu+1)i^{\nu-1}\cdot i^2=(\nu+1)i^{\nu-1}$ δείχνει ότι
$S_\nu=\frac{-(\nu+1)i^{\nu+1}-\nu i^\nu+i}{2}$

β. Αν $\nu=2\kappa+1$ εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη των δύο μελών παρατηρώντας ότι $i^{\nu-1}=i^{2\kappa}=(-1)^\kappa$ $i^\nu=i^{2\kappa+1}=(-1)^\kappa\cdot i$ και $i^{\nu+1}=(i^2)^{\kappa+1}=-(-1)^\kappa$ έχουμε: (απ την α')
$1-3+5-7+\dots(2\kappa+1)(-1)^\kappa=\frac{(2\kappa+2)(-1)^\kappa}{2}=(\kappa+1)(-1)^\kappa$.

Ομοίως αν $\nu=2\kappa$, εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη των δύο μελών της α. και λαμβάνοντας υπ όψη ότι:
$i^{\nu-1}=i^{2\kappa-1}=i(-1)^{\kappa-1}$, $i^\nu=(-1)^\kappa$ και $i^{\nu+1}=i^{2\kappa+1}=(-1)^\kappa\cdot i$ έχουμε
$2-4+6-\dots 2\kappa(-1)^{\kappa-1}=\frac{-(2\kappa+1)(-1)^\kappa+1}{2}$ ο.ε.δ.

---

3. Εστω α, μιγαδικός αριθμός όχι μηδέν, και (Ε) η εξίσωση στο C, με άγνωστο τον Z:
(Ε): $2Z^2-\alpha(7+i\sqrt{3})Z+2\alpha^2(3+i\sqrt{3})=0$.

I. Να βρεθούν οι τετρα... του μιγαδικού $U=1/2+i\sqrt{3}/2$

2. Να υπολογιστούν οι ρίζες Z_1, και Z_2 της (E)

3. Να δειχτεί ότι $Z_2-\alpha=U(Z_1-\alpha)$. Να κατασκευαστεί το τρίγωνο AM_1M_2, όπου A, M_1,M_2, οι εικόνες των α, Z_1,Z_2 στο μιγαδικό επίπεδο.

4. Να σχεδιαστεί το τρίγωνο στη περίπτωση που $\alpha=1+i$

(BACC. E. DIJON)

ΛΥΣΗ

1. Οι τετραγωνικές ρίζες του U είναι $v_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ $v_2=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$.

2. Η διακρίνουσα της (E) είναι:

$$\Delta=\alpha^2(7+i\sqrt{3})^2-16\alpha^2(3+i\sqrt{3})=-2\alpha^2(1+i\sqrt{3})=-4\alpha^2u.$$

Άρα οι ρίζες της είναι:

$$z_1=\frac{\alpha(7+i\sqrt{3})-2\alpha i v_1}{4}=\frac{\alpha}{4}(7+i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+1)=2\alpha$$

$$z_2=\frac{\alpha(7+i\sqrt{3})-2\alpha i v_2}{4}=\frac{\alpha}{4}(7+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1)=\frac{\alpha}{2}(3+i\sqrt{3}).$$

3. Από τα προηγούμενα έχω $z_1-\alpha=\alpha$ και $z_2-\alpha=\frac{\alpha}{2}(1+i\sqrt{3})$. Άρα $z_2-\alpha=U(z_1-\alpha)$.

Αν A, M_1 και M_2 είναι εικόνες των α, z_1, z_2 τότε $|\vec{AM_2}|=|\vec{AM_1}|$ και $(\vec{AM_1},\vec{AM_2})=\frac{\pi}{3}=\arg u$.

Άρα το τρίγωνο AM_1M_2 είναι ισόπλευρο.

4. Όταν $\alpha=1+i$ το σημείο A έχει συντεταγμένες (1,1) το M_1 έχει (2,2). Εξ' άλλου επειδή $z_2=\frac{1+i}{2}(3+i\sqrt{3})=$
$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ το M_2 έχει συντεταγμένες

$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

÷

4. 1. Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $-1-4\sqrt{3}i$.

2. Να λυθεί στο C, η $z^2-iz-\sqrt{3}i=0$.

Εκφράστε κάθε λύση της σε τριγωνομετρική μορφή. Ονομάζουμε z' τη ρίζα με μέτρο 1, και z'' την άλλη ρίζα. Να υπολογιστεί το μέτρο και το όρισμα του $P=z'z''$ και $Q=z''/z'$.

(BACC. D, ORLEANS-TOURS)

ΛΥΣΗ

1. Αν $z=x+yi$ μία ρίζα (τετραγωνική) τότε

$(x+iy)^2=-1-4\sqrt{3}i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-1-4\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ xy=-2\sqrt{3} \end{cases}$ Απαλείφοντας το y έχω $x^2-\frac{12}{x^2}+1=0 \Leftrightarrow x^4+x^2-12=0$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{-1+7}{2}=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$.

Για $x=\sqrt{3}$ έχω $y=-2$ και $x=-\sqrt{3}$ $y=2$

Άρα οι δύο τετραγωνικές ρίζες είναι $z_1=\sqrt{3}-2i$ $z_2=-\sqrt{3}+2i$

2. Η διακρίνουσα είναι $\Delta=i^2-4\sqrt{3}i=-1-4\sqrt{3}i=z_1^2$ και η δοθείσα έχει λύσεις $z'=\frac{i+z_1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=\text{συν}\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

και $z''=\frac{i-z_1}{2}=\frac{i-\sqrt{3}+2i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$

$=\sqrt{3}\left(\text{συν}\,\frac{2\pi}{3}+i\,\text{ημ}\,\frac{2\pi}{3}\right)$.

Έχουμε εξ' άλλου, $|P|=|z'z''|=|z'||z''|=\sqrt{3}$

και $\arg P=\arg z'+\arg z''=\frac{11\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi$ Επίσης $|Q|=\frac{|z'|}{|z''|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

και $\arg Q=\arg z'-\arg z''=\frac{11\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=+\frac{7\pi}{6}$.

5. Εστω T η απεικόνιση του $C-\{i/2\}$ στο C, έτσι ώστε $\forall z\in C-\{i/2\}$, $T(z)=\frac{iz-1+2i}{2z-i}$

Να δειχτεί ότι η T είναι 1-1 και "επί" του $C-\{i/2\}\to C-\{i/2\}$ και ότι για την αντίστροφη της T, ισχύει $T^{-1}=T$.

(BACC. D. BORDEAUX)

ΛΥΣΗ

Έστω $z\in C-\{\frac{i}{2}\}$ και $z'=T(z)$ η εικόνα του μέσω της T. Τότε: $z'=\frac{iz-1+2i}{2z-i} \Leftrightarrow (2z-i)z'=iz-1+2i$

$\Leftrightarrow (2z'-i)z=iz'-1+2i \Leftrightarrow (2z'-i)z=iz-1+2i$. Αυτή η τελευταία δείχνει ότι το $z'\in C-\{\frac{i}{2}\}$. Αφ' ετέρου έχουμε τη συνεπαγωγή:

$$z'=\frac{iz-1+2i}{2z-i} \Longleftrightarrow z=\frac{iz'-1+2i}{2z'-i}$$ δηλ.

$z'=T(z) \Leftrightarrow z=T(z')$. Άρα η T είναι 1-1 και ισχύει $T^{-1}=T$.



6. Εστω ο $z_0=-2-2i\sqrt{3}$.

α. Να βρεθεί το μέτρο του και το όρισμα του. Να υπολογιστεί ο z_0^2 z_0^3 (μέτρο, όρισμα)

β. Να λυθεί στο C, η εξίσωση $z^2=z_0$

γ. Ομοίως η $z^2+2iz+1-2i\sqrt{3}=0$

(BACC. D. LIMOGES)

ΛΥΣΗ

α. $z_0 = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3}\right)$.

β. $|z_0^2| = |z_0|^2 = 16$ $\quad \arg z_0^2 = 2\arg z_0 = \frac{2\pi}{3}$ άρα $z_0^2 = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 8(-1+i\sqrt{3})$

$|z_0^3| = |z_0|^3 = 64$ $\quad \arg z_0^3 = 3\arg z_0 = 0$. Άρα $z_0^3 = 64$.

β. Η $z^2 = z_0 \Leftrightarrow$ αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, $\rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta) =$
$= 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 4 & \Leftrightarrow \rho = 2 \\ 2\theta = \frac{4\pi}{3} & \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Άρα οι λύσεις που ψάχνουμε είναι:

$z_1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} = -z_1$.

γ. $z^2 + 2iz + 1 - 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2 + 1 + 1 - 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$
$(z+i)^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \Leftrightarrow (z+i)^2 = \frac{z_0^2}{4}$.

Άρα έχω τις δύο εξισώσεις:

$\begin{cases} z + i = \frac{z_0}{2} & \Leftrightarrow z = -1 - (1+\sqrt{3})i \\ z + i = -\frac{z_0}{2} & \Leftrightarrow z = 1 - (1-\sqrt{3})i \end{cases}$



---

7. Εστω (Z_ν) $\nu\in N$, μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών που ορίζεται με $Z_0 = 2\sqrt{2}(-1+i)$ και τις ακόλουθες συνθήκες: "Για κάθε άρτιο φυσικό ν, το πρωτεύον όρισμά του $Z_{\nu+1}$ ανήκει στο διάστημα $[\pi/2, \pi]$ και επίσης $Z^4_{\nu+1} = Z_\nu$"

α. Να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του Z_1

θέτοντας $\alpha_\nu = |Z_\nu|$ και $u_\nu = LN\alpha_\nu$ να δειχτεί ότι η (u_ν) είναι γεωμ. πρόοδος. (LN = νεπέρειος λογάριθμος)

ΛΥΣΗ.

α. Είναι $z_0 = -2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right)$

δηλ. $|z_0|=4$ $\arg z_0 = \frac{3\pi}{4}$

Είναι $z_1^4 = z_0 \Leftrightarrow z_1 = \sqrt[4]{z_0}$

Οι τέσσερις ρίζες τετάρτης τάξεως του z_0, προκύπτουν από το τύπο $x_\kappa = \sqrt[4]{4}\left[\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}}{4} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}}{4}\right]$ για $\kappa=0,1,2,3$.

Η συνθήκη για το πρωτεύον όρισμα του z_1 μας αναγκάζει να πάρουμε $z_1 = x_1$ με όρισμα $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{16} = \frac{11\pi}{16}$

Άρα $z_1 = \sqrt[4]{4}\left(\text{συν}\frac{11\pi}{16}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{16}\right)$.

Η ακολουθία (α_ν) είναι προφανώς η $\alpha_0=4$, $\alpha_\nu = 4^{\frac{1}{4^\nu}}$ δηλαδή $\alpha_\nu = 4^{\left(\frac{1}{4}\right)^\nu}$ Επομένως

$u_\nu = \ln\alpha_\nu = \ln 4^{\left(\frac{1}{4}\right)^\nu} = \left(\frac{1}{4}\right)^\nu \ln 4 = \ln 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^\nu$ δηλ. γεωμ. πρόοδος

---

8. Εστω (P) το μιγαδικό επίπεδο και μιά απεικόνιση F του P→P έτσι ώστε: σε κάθε σημείο Μ (εικόνα του Z) να αντιστοιχεί το Μ΄ που είναι εικόνα του $Z' = Z^2-2iZ-1+i$.

1. Να δειχτεί ότι η F είναι "επί". είναι 1-1;
2. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του P, που μένουν αμετάβλητα μέσω της F.
3. α. Εστω (D) η ευθεία με εξίσωση $x=0$. Να βρεθεί θη εικόνα της (D) μέσω της F. Να παρασταθεί γραφικά.

β. Εστω (Δ) η ευθεία με εξίσωση $y=0$. Να γίνουν τα ίδια με την α. περίπτωση.

(BACC. E. LILLE)

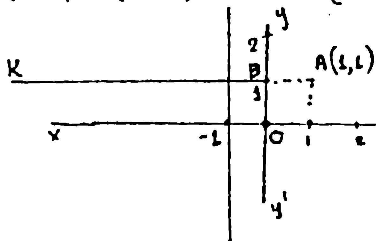
ΛΥΣΗ.

1. Για τον τυχόντα $z_0 = x+yi$ η εξίσωση $z^2-2iz-1+i=z_0$ έχει πάντα λύση. Άρα η απεικόνιση είναι "επί". Επειδή δέ, η προηγούμενη εξίσωση έχει γενικά 2 λύσεις, άρα δεν είναι 1-1.

2. Τα αμετάβλητα σημεία, προκύπτουν απ τη λύση της εξίσωσης $f(z)=z \Leftrightarrow z^2-2iz-1+i=z \Leftrightarrow$
$z^2-(2i+1)z-1+i=0$
Αυτή έχει λύσεις $z_1=1+i$, $z_2=i$ δηλ τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(1,1)$ $B(0,1)$.

3 α. Η ευθεία (D) είναι ο φανταστικός άξονας. Το τυχόν σημείο του είναι το $\Gamma(0,y)$ και είναι η εικόνα του αριθμού $z=0+yi$. Σ' αυτόν, αντιστοιχεί μέσω της f, ο αριθμός $f(0+yi)=(yi)^2-2i(yi)-1+i=-(y-1)^2+i$. Το αντίστοιχο σημείο δηλαδή έχει αρνητική τετμημένη, και σταθερή (=1) τεταγμένη. Δηλ. η εικόνα της (D) είναι η ημιευθεία BK.

β. Η (Δ) είναι ο πραγματικός άξονας. Το τυχόν σημείο του $\Delta(x,0)$ αντιστοιχεί στον $f(x)=x^2-2ix-1+i=(x^2-1)-(2x-1)i$ και άρα η εικόνα της (Δ) είναι όλο το P, εκτός των σημείων με τετμημένη μικρότερη του -1, δηλ. τα σημεία του P, δεξιά και πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x=-1$
(Το x^2-1 είναι πάντα ≥ -1)



9. Εστω F η απεικόνιση του C→C που δίνεται:

I χεC $F(Z)=Z^3-(1-5i)Z^2-2(5+i)Z+8i$.

1. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $F(Z)=0$ δέχεται για λύση καθαρώς φανταστικό αριθμό.

2. Να λυθεί στο C η $F(Z)=0$. (Να λάβετε υπ'όψη σας $F(Z)=(Z-\lambda i)(Z^2+\alpha Z+\beta)$ $\alpha,\beta\varepsilon C^2$ $\lambda\varepsilon R$.

3. Εστω Z_1, Z_2, Z_3 οι ρίζες του β'ερωτήματος, όπου Z αυτή με αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος, Z_2 αυτή με πραγματικό μέρος μηδέν. Να δειχτεί ότι οι Z_1, Z_2, Z_3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου.

(BACC. C GRENOBLE IPJS)

ΛΥΣΗ

1. Πρέπει $f(\lambda i)=0 \Rightarrow (\lambda i)^3+(1-5i)(\lambda i)^2-2(5+i)\lambda i+8i=0$ $\Rightarrow (-\lambda^2+2\lambda)+(-\lambda^3+5\lambda^2-10\lambda+8)i=0$ Πρέπει να βρώ μια τιμή του λ, που να μηδενίζει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. $-\lambda^2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=2$. Για $\lambda=2$ μηδενίζεται και το φανταστικό μέρος. Αρα η λύση (καθαρώς φανταστική) είναι $z_2=2i$.

2. Είναι $z^3+(1-5i)z^2-2(5+i)z+8i=(z-2i)(z^2+az+b)=$
$=z^3+(a-2i)z^2+(b-2ai)z-2bi$.

Αρα πρέπει
$$\left.\begin{aligned} a-2i&=1-5i\\ -2b&=8\\ -2(5+i)&=b-2ai \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a&=1-3i\\ b&=-4. \end{aligned}$$

Αρα έχω να λύσω την $z^2+(1-3i)z-4=0$

Οι λύσεις της είναι $z_1=1+i$ $z_3=-2+2i$

3. Πράγματι οι $z_1=1+i$ $z_2=2i$, $z_3=-2+2i$ αποτελούν διαδ. όρους γεωμ. προόδου αφού $z_2^2=z_1\cdot z_3$

10. Εστω το $P(Z)=Z^3+7iZ^2-Z-7i$.

1. Υπολογίστε το $P(1)$. Να βρεθεί το πολυώνυμο β΄βαθμού $Q(Z)$ έτσι ώστε $P(Z)=(Z-1)Q(Z)$.

2. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $P(Z)=0$.

3. Εστω στο μιγαδικό επίπεδο τα Α, Β, Γ οι εικόνες των λύσεων του β΄ερωτήματος. Τι τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;

(BACC. ALGERIEN)

ΛΥΣΗ.

1. $P(1)=1-i+1-i-2+2i=0$

$z^3-iz^2+(1-i)z-2+2i=(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)=$ $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

$=z^3+(\alpha-1)z^2+(\beta-\alpha)z-\beta$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει αν εξισώσω τους ισοβάθμιων όρων τους συντελεστές ότι: $\alpha=1-i$, $\beta=2-2i$

2. Θα λύσω την $z^2+(1-i)z+2-2i=0$

Αυτή κατά τα γνωστά έχει λύσεις τις $z_1=-1$ $z_2=-7i$.

Η τρίτη λύση είναι βεβαίως (της $P(z)=0$) η $z_3=1$.

Τα τρία σημεία, ορίζουν, όπως είναι φανερό ισοσκελές τρίγωνο.

11. Θεωρώ το μιγαδικό επίπεδο (P) και το σημείο $A(2i)$. Εστω η $F:P-\{A\}\to P$ με τύπο $F(Z)=\dfrac{2iZ-5}{Z-2i}$

1. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο σημεία Β και Γ του Ρ, αμετάβλητα ως προς την F.

2. Να δειχθεί ότι η F είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφη.

3. Να δειχθεί ότι η ευθεία ψψ΄εκτός του Α, είναι αμετάβλητη ως προς την F (έχει εικόνα τον εαυτό της).

4. Να δεχτεί ότι αν $Z \neq 2i$ $|F(Z)-2i| \cdot |Z-2i| = 9$.

5. Να εξάγετε συμπεράσματα για την εικόνα μέσω της F, του κύκλου Γ:(Α,τ). Να προσδιοριστεί το τ, ώστε ο κύκλος Γ, να είναι εικόνα του εαυτού του.-

(BACC C, ASIE ET SUD - EST ET AUSTRALIE1948)

ΛΥΣΗ.

1. Τα αμετάβλητα σημεία θα προκύψουν απ τη λύση της εξίσωσης $f(z)=z$ δηλ. $\frac{2iz-5}{z-2i}=z$ ή της

$z^2-4iz+5=0$ Οι λύσεις της είναι οι $z_1=5i$ $z_2=-i$ δηλ. τα αμετάβλητα σημεία τα Κ(0,5) Λ(0,-1).

2. Απ τη σχέση $\frac{2iz_1-5}{z_1-2i}=\frac{2iz_2-5}{z_2-2i} \Longrightarrow z_1=z_2$ άρα 1-1.

Η αντίστροφη προκύπτει εύκολα.

3. Το τυχόν σημείο (0,y) της yy' έχει για εικόνα στο Ρ, την εικόνα του αριθμού $f(yi)=\frac{2iyi-5}{yi-2i}=\frac{2y+5}{y-2}i$ δηλ. είναι σημείο της yy'.

4. $\left|\frac{2iz-5}{z-2i}-2i\right|\cdot\left|z-2i\right| = \left|\left(\frac{2iz-5}{z-2i}-2i\right)(z-2i)\right| = \left|2iz-5-2iz-4\right|$

$= |-9| = 9.$

5. Η εικόνα του $\Gamma: |z-2i| = r$ είναι ο κύκλος Γ': $|f(z)-2i| = r'$. Αλλά επειδή $|f(z)-2i| = \frac{9}{|z-2i|}$ η ακτίνα του νέου κύκλου Γ' είναι $r' = \frac{9}{|z-2i|}$. Οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο, άρα για να συμπίπτουν πρέπει οι ακτίνες τους να ταυτίζονται: δηλ. $\frac{9}{|z-2i|} = r = |z-2i| \Rightarrow$ $|z-2i| = 3$ άρα η ζητούμενη ακτίνα $|z-2i|$ είναι $r=3$.

12. Έστω Μ η εικόνα του $Z=x+i\psi$ στο μιγαδικό επίπεδο Ρ. Όταν $Z\neq -i$ αντιστοιχούμε σ'αυτόν τον

$\mathbf{Z} = \frac{Z^2}{Z+i}$.

1. Να βρεθεί και να απεικονιστεί γραφικά το σύνολο (Γ) των σημείων Μ για τα οποία ο $\mathbf{Z}$ είναι καθαρά φανταστικός.

2. Να λυθεί η εξίσωση $Z^2+2i\alpha Z-2\alpha=0$ ($\alpha \in R$)
Να δειχτεί ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης αυτής ανήκουν στο σύνολο (Γ). Το αποτέλεσμα αυτό μπορούσε να προβλεφτεί χωρίς να λυθεί η εξίσωση;

ΛΥΣΗ

1. Τα σημεία $M(z)$ που ανήκουν στό σύνολο (Γ) είναι αυτά που πληρούν την $\frac{z^2}{z+i} = -\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}-i} \Leftrightarrow$

$-z^2(\bar{z}-i) = \bar{z}^2(z+i) \Leftrightarrow i(z^2-\bar{z}^2) = |z|^2(z+\bar{z})$. Αν θέσω $z = x+iy$ η προηγούμενη σχέση γίνεται: $-4xy = (x^2+y^2)2x \Leftrightarrow$ $x^2+y^2+2y=0$ (1). Δηλαδή τα σημεία $M(x,y)$ του συνόλου (Γ) αποτελούν τον κύκλο της εξίσωσης (1).

2. Η εξίσωση λύνεται απλά κατά τα γνωστά. Πώς όμως μπορώ να προβλέψω ότι οι λύσεις της ανήκουν στο σύνολο (Γ) χωρίς προηγούμενα να την επιλύσω;

Έστω $x+yi$ μιά λύση της. Τότε θα ισχύει ότι:

$(x+iy)^2+2ia(x+yi)-2a=0 \Leftrightarrow (x^2-y^2-2ay-2a)+i(2xy+2ax)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2ay-2a=0 \\ 2xy+2ax=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2y=0 \\ y=-a \end{cases}$. Δηλαδή η λύση $x+iy$ της εξίσωσης ανήκει στο σύνολο (Γ) ή οι συντεταγμένες (x,y) του σημείου που είναι λύση της εξίσωσης πληρεί την (1).

---

13. 1. Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού $a=16(1-i)$

2. Για οποιοδήποτε $\lambda \in R$ θέτουμε:

$z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2}\, e^{i\lambda} = x_\lambda + i\psi_\lambda$ (Ισχύει $e^{i\theta}$=συνθ+iημθ).

α. Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί x_λ, ψ_λ συναρτήσει του λ.

β. Να βρεθεί το σύνολο (Ε) των σημείων M_λ με συντεταγμένες $(x_\lambda, \psi_\lambda)$ όταν $\lambda \in (0, 2\pi)$.

γ. Να δειχτεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης $[z-(1+i)]^3 = \alpha$, έχουν σαν εικόνες τα σημεία του (Ε).

(BACC. E, PARIS 1984).

ΛΥΣΗ

1. Είναι $|\alpha| = 16\sqrt{2}$ $\arg\alpha = \frac{7\pi}{4}$

Άρα αν z_0, z_1, z_2 οι ζητούμενες κυβικές ρίζες, έχουμε:

$z_0 = 2\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{7\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{12}\right)$

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{15\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{15\pi}{12}\right)$ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{23\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{23\pi}{12}\right)$.

2. α $z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2}(\text{συν}\lambda + i\,\text{ημ}\lambda) = x_\lambda + i y_\lambda \Leftrightarrow$

$1+2\sqrt{2}\,\text{συν}\lambda = x_\lambda$

$1+2\sqrt{2}\,\text{ημ}\lambda = y_\lambda$. (1)

β. Για να βρω σχέση μεταξύ των x_λ, y_λ ανεξάρτητη του λ, αφαλείφω τα ημλ, συνλ απ τις (1). Έχω:

$(x_\lambda - 1)^2 + (y_\lambda - 1)^2 = 8$ (2). Δηλαδή το σύνολο (Ε) είναι ο κύκλος (2).

3. Η εξίσωση γράφεται: $z-(1+i) = z_k$ $(k=0,1,2)$ και z_k οι κυβικές ρίζες του α που έχουν υπολογιστεί.

Από δώ προκύπτει ότι $z = 1+i+z_k = 1+i+2\sqrt{2}(\text{συν}\lambda + i\,\text{ημ}\lambda)$ άρα

ο z, που είναι λύση της δοθείσας, είναι της μορφής $z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2}\, e^{i\lambda}$ και επομένως ανήκει στο σύνολο (C).

---

14. Έστω $Z_0 = \text{συν}\frac{2\pi}{5} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{5}$.

1. θέτω $\alpha = Z_0 + Z_0^4$ $\beta = Z_0^2 + Z_0^3$

α. Να δειχτεί ότι $1 + Z_0 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4 = 0$, και συμπεράνετε, ότι τα α και β είναι λύσεις της $x^2 + x - 1 = 0$ (I)

β. Να βρείτε το α, συναρτήσει του συν $\frac{2\pi}{5}$

γ. Να λυθεί η (1) και να υπολογιστεί η τιμή του συν $\frac{2\pi}{5}$

2. Ονομάζω A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των $1, Z_0, Z_0^2, Z_0^3, Z_0^4$ αντίστοιχα.

α. Έστω H το σημείο τομής της ευθείας A_1A_4 με τον άξονα Οχ. Να δειχτεί ότι $\overline{OH} = \text{συν}\frac{2\pi}{5}$

β. Έστω (L) ο κύκλος κέντρου $\Omega(-\frac{1}{2})$ που περνάει από το B(i). Ο (L) τέμνει τον Οχ στα Μ και Ν. (το Μ με θετική τετμημένη). Δείξτε ότι $\overline{OM} = \alpha$ $\overline{ON} = \beta$ και H είναι το μέσο της ΟΜ.

γ. Να συνάγετε έναν τρόπο κατασκευής κανονικού πενταγώνου, γνωρίζοντας το κέντρο Ο και την κορυφή A_0.

(BACC. C AMIENS 1984)

ΛΥΣΗ

1 α. Ο αριθμός z_0 είναι μιας πέμπτης τάξεως ρίζα της μονάδας. Είναι δηλ. $z_0^5-1=0 \Leftrightarrow (z_0-1)(z_0^4+z_0^3+z_0^2+z_0+1)=0$ και επειδή $z_0\neq 1$ έχουμε ότι $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$.

Έχουμε λοιπόν ότι $\alpha+\beta=-1$. Επίσης έχουμε ότι

$\alpha\cdot\beta=(z_0+z_0^4)(z_0^2+z_0^3)=z_0^3+z_0^4+z_0^6+z_0^7=z_0^3+z_0^4+z_0+z_0^2=\alpha+\beta=-1$.

Δηλ. τελικά έχω $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\cdot\beta=-1$. Αυτό σημαίνει ότι τα α και β είναι λύσεις της (1).

β. $\alpha=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}+i\eta\mu\frac{2\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}-i\eta\mu\frac{2\pi}{5}=2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}$

γ. $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Η θετική ρίζα της θα είναι το $\alpha=2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}$. Άρα $2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

2 α. Τα A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1. Επομένως είναι $\overline{OH}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}$.

β. Είναι $\overline{OM}=\overline{\Omega M}-\overline{\Omega O}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}=\alpha$.

Ομοίως για το $\overline{ON}$. Και αφού $\overline{OH}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}$ άρα το Η είναι μέσον του ΟΜ.

γ. Βρίσκω το σημείο Ω στη προέκταση OA_0. Κατασκευάζω τον κύκλο (Ω, ΩΒ) όπου το ΩΒ κατασκευάζεται γραφικά. Βρίσκω το σημείο τομής Μ, και στο μέσο Η του ΟΜ φέρω κάθετη. Έτσι βρίσκω δύο κορυφές A_1, A_4 και μετά με το διαβήτη τις υπόλοιπες.

15.1 Να λυθεί στο C η εξίσωση:

$(Z)= Z^4-4iZ^3+(3-12i)Z^2-(24+14i)Z+12-36i= 0$

αν. είναι γνωστό, ότι δέχεται δύο λύσεις καθαρά φανταστικές. Έστω Z_1, Z_3 αυτές οι λύσεις και Z_2, Z_4 οι άλλες δύο

2. Να δειχτεί ότι τα τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 με εικόνες τα Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 αντίστοιχα, είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

3. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού $P(Z)= Z^4 + \alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$, να προσδιοριστούν) του οποίου οι ρίζες έχουν σαν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο, τα σημεία M_1', M_2', M_3', M_4' συμμετρικά των M_1, M_2, M_3, M_4 αντίστοιχα ως προς την ευθεία $\psi = \chi$.

(BACC E , AMIENS 1984)

ΛΥΣΗ

1. Έστω το λi ρίζα της εξίσωσης. Τότε

$\lambda^4-4\lambda^3-(3-12i)\lambda^2-(24+14i)\lambda i+12-36i=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda^4-4\lambda^3-3\lambda^2+14\lambda+12)+i(12\lambda^2-24\lambda-36)=0$

Οι τιμές που μηδενίζουν και τις δύο παρενθέσεις είναι $\lambda_1=3$, $\lambda_3=-1$. Άρα $z_1=3i$ $z_3=-i$ και η αρχική διαιρείται ακριβώς με το πολυώνυμο $(z-3i)(z+i)$.

Επομένως ισχύει $Q(z)=(z-3i)(z+i)(z^2+az+b)$ απ' όπου έχω $a=-2i$, $b=4-12i$. Επομένως οι άλλες δύο ρίζες της αρχικής βρίσκονται απ' την επίλυση της $z^2-2iz+4-12i=0$ και είναι $z_2=2+4i$ $z_4=-2-2i$

2. Τα εν λόγω σημεία, έχουν στο μιγαδικό επίπεδο συντεταγμένες: $M_1(0,3)$ $M_2(2,4)$ $M_3(0,-1)$ $M_4(-2,-2)$

Υπολογίζοντας τους συντελεστές κατεύθυνσης των αντίστοιχων ευθειών φαίνεται ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
Πχ $\lambda_{M_4M_3} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ $\lambda_{M_2M_1} = \frac{4-3}{2-0} = \frac{1}{2}$ κ.λπ.

3. Τα συμμετρικά των τεσσάρων σημείων μας ως προς την $y=x$ έχουν συντεταγμένες:
$M_1'(3,0)$ $M_2'(4,2)$ $M_3'(-1,0)$ $M_4'(-2,-2)$ άρα οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ είναι: $z_1=3$, $z_2=4+2i$, $z_3=-1$, $z_4=-2-2i$
Επομένως το $P(z)=(z+1)(z-3)(z-4-2i)(z+2+2i)$
Εκτελώντας τις πράξεις, και διατάσσοντας ως δυνάμεις του z, υπολογίζω τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

---

16. Έστω P το μιγαδικό επίπεδο και P΄ το μιγαδικό επίπεδο εκτός του άξονα χχ΄, C το σύνολο των μιγαδικών και C΄ των μιγαδικών εκτός των πραγματικών. (C΄= C − R)

1. Έστω $Z \in C'$ και $t \in R$. Να δειχτεί ότι ο $Z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t$ δεν είναι μηδέν και αν $Z = \chi + i\psi$ να βρεθεί το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $Z' = \frac{Z\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{Z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t}$.
Να συμπεράνετε ότι $Z' \in C'$.

Για $t \in R$ ονομάζω F_t την απεικόνηση του $C' \to C'$ με τύπο $f_t(Z) = \frac{Z\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{Z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t}$.

2. Να διερευνηθούν τα σταθερά σημεία του f_t.

Εξαρτάται η απάντηση απ' την παράμετρο t ;

3. Να δειχτεί για κάθε ζεύγος (t, t') πραγματικών αριθμών $f_{t+t'} = f_t \circ f_{t'}$. Στη συνέχεια να δειχτεί ότι το σύνολο F των απεικονήσεων f_t όταν $t \in R$ με εσωτερικό νόμο τη σύνθεση των απεικονήσεων είναι αβελιανή ομάδα.

(BACC C. CENTRES D'OUTRE - MER 1983)

ΛΥΣΗ.

1. Ο $z\eta\mu t \notin R$ και ο $\sigma\upsilon\nu t \in R$. Άρα δέν μπορούν να έχουν άθροισμα 0, εκτός αν μηδενιστούν συγχρόνως για το ίδιο t, ο $\eta\mu t$ και ο $\sigma\upsilon\nu t$ πράγμα αδύνατο.

$$z' = \frac{(x+iy)\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{(x+iy)\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t} = \frac{(x\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t) + y\sigma\upsilon\nu t\, i}{(x\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t) + y\eta\mu t\, i} =$$

$$= \frac{\left[(x\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t) + y\sigma\upsilon\nu t\, i\right]\left[(x\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t) - y\eta\mu t\, i\right]}{(x\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t)^2 + y^2\eta\mu^2 t} \quad (1)$$

Απ τη σχέση αυτή υπολογίζεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος τού z'. Για να είναι $z' \in C'$ πρέπει το φανταστικό του μέρος να είναι $\neq 0$. Πράγματι απ την (1) ο αριθμητής του φανταστικού μέρους του z' είναι

$$-(x\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t)y\eta\mu t + (x\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t)y\sigma\upsilon\nu t =$$

$$= -xy\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t + y\eta\mu^2 t + xy\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t + y\sigma\upsilon\nu^2 t = y(\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t) =$$

$y \neq 0$ αφού ο $z = x+iy \in C'$.

2. Πρέπει $f_t(z) = z \Rightarrow \dfrac{z\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t} = z \Leftrightarrow z^2\eta\mu t + \eta\mu t = 0$
$\Leftrightarrow \eta\mu t(z^2+1) = 0$

Άρα για $t \neq k\pi$ τα σταθερά σημεία του μετασχημα-

τισμού είναι τα $z=\pm i$. Για $t=\kappa\pi$ ο μετασχηματισμός είναι ταυτότης.

3 Είναι $f_t \circ f_{t'} = \dfrac{f_{t'}\,\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{f_{t'}\,\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t} =$

$$= \frac{\dfrac{z\,\sigma\upsilon\nu t' - \eta\mu t'}{z\,\eta\mu t' + \sigma\upsilon\nu t'}\cdot \sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{\dfrac{z\,\sigma\upsilon\nu t' - \eta\mu t'}{z\,\eta\mu t' + \sigma\upsilon\nu t'}\,\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t} =$$

$$= \frac{z\,\sigma\upsilon\nu t'\,\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t'\,\eta\mu t - z\,\eta\mu t\,\eta\mu t' - \eta\mu t\cdot\eta\mu t'}{z\,\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t' - \eta\mu t\,\eta\mu t' + z\,\sigma\upsilon\nu t\cdot\sigma\upsilon\nu t' + \sigma\upsilon\nu t\cdot\sigma\upsilon\nu t'} \quad (2)$$

Αφ' ετέρου $f_{t+t'} = \dfrac{z\,\sigma\upsilon\nu(t+t') - \eta\mu(t+t')}{z\,\eta\mu(t+t') + \sigma\upsilon\nu(t+t')}$ όπου αναπτύσσοντας τα τριγωνομετρικά αθροίσματα προκύπτει το β' μέλος της (2) πράγμα που αποδεικνύει την ισότητα.

Επειδή $f_{\kappa\pi}(z) = z$ και $f_{t+\kappa\pi} = f_t \circ f_{\kappa\pi} = f_t$ άρα η $f_{\kappa\pi}$ είναι ουδέτερο στοιχείο της σύνθεσης των συναρτήσεων f_t. Επειδή δε $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'} = f_{\kappa\pi} \Rightarrow f_{t'} = f_{\kappa\pi - t} = f_t^*$. Δηλαδή για κάθε στοιχείο υπάρχει το συμμετρικό του.

Είναι επίσης $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'} = f_{t'+t} = f_{t'} \circ f_t$. Δηλαδή η πράξη μας είναι αντιμεταθετική.

Επίσης $f_t \circ (f_\kappa \circ f_\lambda) = f_t \circ f_{\kappa+\lambda} = f_{t+(\kappa+\lambda)} = f_{(t+\kappa)+\lambda} = f_{t+\kappa} \circ f_\lambda =$

$= (f_t \circ f_\kappa) \circ f_\lambda$ δηλ. προσεταιριστική. Τελικά το σύνολο F είναι αντιμεταθετική ομάδα. —

17. **1.** Να λυθεί στο C η εξίσωση $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$ θεωρώντας μια πραγματική προφανή ρίζα.

Ονομάζουμε z_1 την ρίζα με θετικό το φανταστικό μέρος και z_2, με αρνητικό φανταστικό μέρος.

2. Έστω $S = \{1, -1, z_1, -z_1, -z_2, z_2\}$
Να δειχτεί ότι το (S.) είναι αβελιανή ομάδα.

3. Να δειχτεί ότι τα z_1, z_2 είναι μιά βάση του διανυσματικού χώρου (C, +,.). Να βρεθούν οι συντεταγμένες των 1, z_1^2, z_2^2 $z_1.z_2$, σ'αυτή τη βάση.

(BACC, C, ET E, LIMOGES)

ΛΥΣΗ

1. Η πραγματική ρίζα της εξίσωσης είναι η $z=1$.
Άρα $z^3-2z^2+2z-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-z+1)=0$. Άρα $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
$z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (Είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας).

2. α. Το σύνολο S είναι "κλειστό" ως προς τον πολ/μό.
Πράγματι $-z_1^2 = z_2$, $z_1^2 = -z_2$, $z_2^2 = -z_1$, $-z_2^2 = z_1$, $z_1 z_2 = 1$ ....

β. Η προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα είναι ιδιότητες που ισχύουν για τον πολ/μό.

γ. Ουδέτερο στοιχείο το 1.

δ. Κάθε στοιχείο έχει το αντίστροφό του π.χ. το -1 έχει τον εαυτό του, το z_1 έχει το z_2, το $-z_1$ έχει το $-z_2$ κλ.

Άρα είναι αβελιανή ομάδα.

3. Για να είναι τα z_1, z_2 βάση, πρέπει α) να παράγουν το C, β) Να είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

α. Θα εκφράσω τον τυχόντα $z=\alpha+\beta i \in \mathbb{C}$ συναρτήσει των z_1 και z_2:

$$\alpha+\beta i = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$ Εξισώνοντας πραγματικά, φανταστικά έχω:

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2 &= 2\alpha \\ \lambda_1-\lambda_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\beta \end{aligned} \iff \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\beta \\ \lambda_2 &= \alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\beta. \end{aligned}$$

Άρα τα z_1 z_2 παράγουν το $\mathbb{C}$.

β. Για τη γραμμική ανεξαρτησία πρέπει

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0 \iff \lambda_1=\lambda_2=0$$

$$\lambda_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\lambda_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=0 \iff \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda_1-\lambda_2)=0 \iff$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1-\lambda_2=0 \end{aligned}\right\} \iff \lambda_1=\lambda_2=0 \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Οι συντεταγμένες του 1:

$$1 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_1-\lambda_2) \iff \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=2 \end{cases} \iff \begin{aligned} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=1 \end{aligned}$$

άρα $1=(1,1)$ ομοίως $z_1 z_2 = (1,1)$

Για το z_1^2 έχω:

$$z_1^2 = -z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \iff \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=-1 \\ \lambda_1-\lambda_2=1 \end{cases} \iff \begin{aligned} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-1 \end{aligned}$$

Δηλ. $z_1^2=(0,-1)$. Ομοίως για z_2^2.

18. Δίνεται η εξίσωση (1) στο C

$z^2 - z[-\sigma\upsilon\nu^2 t + i\sigma\upsilon\nu t.\eta\mu t] - \eta\mu^2 t - i\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t = 0$

$t \in R$.

1. Να βρεθεί ο t, ώστε οι ρίζες να είναι αντίθετες.
2. Ώστε η μία ρίζα να είναι 0.
3. Αν οι z_1, z_2 είναι ρίζες της (1) να οριστεί ο t ώστε $|z_1 z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Υποθέτοντας ότι η z_1 είναι πραγματική να βρεθούν οι z_1 και z_2.

(BACC. C, PARIS)

ΛΥΣΗ.

1. Τότε $z_1+z_2=0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu^2 t + i\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t = 0 \Leftrightarrow$ $t = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

2. Τότε $z_1\cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu^2 t - i\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t = 0 \Leftrightarrow \eta\mu t = 0 \Leftrightarrow t = \kappa\pi$.

3. Πρέπει $|z_1 z_2| = |-\eta\mu^2 t - i\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\eta\mu^4 t + \eta\mu^2 t\cdot\sigma\upsilon\nu^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \eta\mu^2 t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

4. Αν $z_1 \in R$, επειδή είναι ρίζα της (1) θα έχουμε:

$z_1^2 - z_1[-\sigma\upsilon\nu^2 t + i\sigma\upsilon\nu t\cdot\eta\mu t] - \eta\mu^2 t - i\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t = 0 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} z_1^2 + \sigma\upsilon\nu^2 t\cdot z_1 - \eta\mu^2 t = 0 \\ -z_1\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t\sigma\upsilon\nu t = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1 - \sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t = 0 \\ z_1 = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z_1 = -1.$

Αν $S = z_1 + z_2 \Rightarrow z_2 = S - z_1 = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 t + i\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t.$

19. Έστω P το μιγαδικό επίπεδο και M_1, M_2 δύο σημεία του P, εικόνες των Z_1 και Z_2.

1. Να δειχτεί ότι οι προτάσεις α και β που ακολουθούν είναι ισοδύναμες:

α. Τα M_1 και M_2 είναι διακεκριμένα και η ευθεία M_1M_2 έχει συντελεστή διευθύνσεως **1**.

β. Ο $\frac{(Z_1-Z_2)^2}{i}$ είναι πραγματικός αριθμός θετικός.

2. Υποθέτουμε ότι τα Z_1, Z_2 είναι λύσεις της

$z^2 - 2(\alpha+i\beta)z - 1 - \alpha^2 - 2i = 0$

Να δειχτεί ότι η πρόταση α. είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη γ: $2\alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0$ και $\alpha\beta + 1 > 0$

(SERIE E, AMERIQUE DU NORD)

ΛΥΣΗ

1. Η (β) $\Leftrightarrow \frac{(z_1-z_2)^2}{i} \in R^+ \Leftrightarrow \frac{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2}{i} \in R^+$

$\Leftrightarrow \left[(x_1+iy_1)^2+(x_2+iy_2)^2-2(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\right](-i) \in R^+ \Leftrightarrow$

$(x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2-2x_1x_2+2y_1y_2)(-i)+(2x_1y_1+2x_2y_2-2x_1y_2-2x_2y_1) \in R^+$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2=0 & (1)\\ (x_1-x_2)(y_1-y_2)>0 & (2)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2 & (3)\\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>0 & (4)\end{matrix}\right\}$

Απ την (2) ⇒ ότι $x_1 \neq x_2$ και $y_1 \neq y_2$ άρα M_1 και M_2 διακεκριμένα

$(3),(4) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}y_1-y_2=x_1-x_2\\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$ άρα η M_1M_2 έχει

 συντελεστή διευθ. 1.

2. Η πρόταση α. ισοδυναμεί με την β. όρα

o $\frac{(z_1-z_2)^2}{i} \in R^+ \Leftrightarrow \frac{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2}{i} \in R^+ \Leftrightarrow$

$\frac{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}{i} \in R^+ \Leftrightarrow \frac{4(a^2-b^2+2abi)+4+4a^2+8i}{i} \in R^+ \Leftrightarrow$

$-i(8a^2-4b^2+4)+(8ab+8) \in R^+ \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} 2a^2-b^2+1=0 \\ ab+1>0 \end{matrix}\right\}$ οεδ.

---

20. Αν Z∈C , θεωρώ την $f(Z) = Z^3 - 2Z^2 + Z - 2$

Ι. α. Να δειχτεί ότι $f(2) = 0$

β. Να βρεθούν οι Z , Z_2, Z_3 που για κάθε Z∈C, πληρούν την $f(Z)= (Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)$

2. Για κάθε Z∈C θέτουμε

$f'(Z)= (Z-Z_1)(Z-Z_2)+(Z-Z_2)(Z-Z_3)+(Z-Z_3)(Z-Z_1)$

Έστω M_1, M_2, M_3 οι εικόνες των Z_1, Z_2, Z_3 στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω επίσης , ένα σημείο N , εικόνα του αριθμού Z. Να δειχτεί ότι: αν το N είναι διαφορετικό των M_1, M_2 και M_3, τότε ο αριθμός που αντιστοιχεί στο διάνυσμα

$\frac{1}{(\overrightarrow{MN})^2}\overrightarrow{M_1N} + \frac{1}{(\overrightarrow{M_2N})^2}\overrightarrow{M_2N} + \frac{1}{(\overrightarrow{M_3N})^2}\overrightarrow{M_3N}$ είναι ο συζυγής του $\frac{f'(Z)}{f(Z)}$

ΛΥΣΗ

1. b. $z(z^2+1)-2(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow$
$(z-2)(z+i)(z-i)=0$ άρα $z_1=2$ $z_2=-i$, $z_3=i$

Έστω $z=x+yi$

2. Είναι $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{1}{(z-z_3)}+\dfrac{1}{(z-z_2)}+\dfrac{1}{(z-z_1)}=$

$$=\frac{1}{x+(y-1)i}+\frac{1}{x+(y+1)i}+\frac{1}{(x-2)+yi}=$$

$$=\frac{x-(y-1)i}{x^2+(y-1)^2}+\frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}+\frac{(x-2)-yi}{(x-2)^2+y^2}$$

Άρα $\overline{\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)}=\dfrac{x+(y-1)i}{x^2+(y-1)^2}+\dfrac{x+(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}+\dfrac{(x-2)+yi}{(x-2)^2+y^2}$ (1).

Στη συνέχεια θα υπολογίσω τις συντεταγμένες του δοθέντος διανύσματος, απ τις οποίες θα βρώ το μιγαδικό που αντιστοιχεί σ' αυτό.

Είναι $M_1(2,0)$ $M_2(0,-1)$ $M_3(0,1)$ $N(x,y)$

Άρα $\overrightarrow{M_1N}=(x-2,y)$ $\overrightarrow{M_2N}=(x,y+1)$ $\overrightarrow{M_3N}=(x,y-1)$ άρα

στο δοθέν διάνυσμα αντιστοιχεί ο αριθμός

$$\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\left[(x-2)+yi\right]+\frac{1}{x^2+(y+1)^2}\left[x+(y+1)i\right]+\frac{1}{x^2+(y-1)^2}\left[x+(y-1)i\right]. (2)$$

Απ τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

21. Κάθε σημείο $M(\chi,\psi)$ του επιπέδου, E_2, συνδέεται με τον μιγαδικό $Z=\chi+i\psi$.

1. Έστω H η προβολή του $M(\chi,\psi)$ πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\chi=1$. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων M που η $D(M,H)=|Z|$.

2. Να δειχτεί ότι για οποιοδήποτε $\theta\in(-\pi,\pi)$, το σημείο M που είναι εικόνα του μιγαδικού $Z=\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ είναι πάνω στην παραβολή $P:\ \psi^2=-2\chi+1$.

3. Να δειχτεί ότι $\theta\in(-\pi,\pi)$ ισχύει $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}=\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}$. Να δειχτεί στη συνέχεια ότι όταν το θ μεταβάλλεται στο $(-\pi,\pi)$, το σημείο $M(z)$ με $z=\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ διαγράφει όλη την παραβολή P.

4. Έστω f η απεικόνηση του $E_2-\{O,O\}$ στον στον εαυτό του: $f: M(Z)\rightarrow M'(-\frac{1}{\bar{Z}})$. Αν το θ μεταβάλλεται στο $(-\pi,\pi)$, θεωρούμε το σημείο $M(Z)$ της P με $Z=\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}(\sigma\upsilon\nu\theta+i\ \eta\mu\theta)$

α. Να βρεθεί το $1/\bar{Z}$ του $M'=f(M)$ σε τριγ. μορφή.

β. Έστω $m'(\alpha')$ το σημείο του E_2 με $\alpha'=\sigma\upsilon\nu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta+i\ \eta\mu\theta)$. Να δειχτεί ότι το ανήκει σε κύκλο C κέντρου $\Omega(1/2,0)$ και ακτίνας $1/2$.

γ. Να δειχτεί ότι τα σημεία O, M, M', m' είναι συνευθειακά. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{M'm'}$ και το μέτρο του. Να εξηγηθεί πως μπορούμε να κατασκευάσουμε το M' ξεκινώντας απ το m' του C. Κατασκευάστε μερικά τέτοια σημεία. Έπειτα να χαράξτε σημεία της P, απ τα M' μέσω της f.

(BACC SERIE E, TOULOUSE)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $d(M,H) = |x-1|$ και $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ άρα $|x-1| = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow y^2 = -2x+1$. Δηλ. το $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής $y^2 = -2x+1$.

2. Οι αναλυτικές συντεταγμένες του $z = \frac{1}{1+συνθ}(συνθ + iημθ)$

είναι $x = \frac{συνθ}{1+συνθ}$, $y = \frac{ημθ}{1+συνθ}$. Άρα η εικόνα του z,

το σημείο $M(x,y)$ πρέπει για να είναι πάνω στην παραβολή P να ισχύει:

$$\frac{ημ^2θ}{(1+συνθ)^2} = -\frac{2συνθ}{1+συνθ} + 1 \Leftrightarrow \frac{ημ^2θ}{(1+συνθ)^2} = \frac{1-συνθ}{1+συνθ}$$ που ισχύει.

3. Η πρώτη σχέση αποδεικνύεται εύκολα. Το σημείο M έχει συντεταγμένες $x = \frac{συνθ}{1+συνθ}$, $y = \frac{ημθ}{1+συνθ} = εφ\frac{θ}{2}$. Για να διαγράφει όλη τη παραβολή P, πρέπει το $y \in (-\infty, \infty)$. Πράγματι αφού $θ \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow \frac{θ}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow εφ\frac{θ}{2} = y \in (-\infty, \infty)$.

4. από $\frac{1}{z} = \frac{1+συνθ}{συνθ - iημθ} = (1+συνθ)(συνθ + iημθ)$

5. Ο a' σε αναλυτική μορφή γράφεται: $a' = συν^2θ + iημθσυνθ$ άρα έχουμε $m'(συν^2θ, ημθσυνθ)$. Ο κύκλος $\mathbb{C}$ έχει εξίσωση $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Πράγματι οι συντεταγμένες του m' πληρούν αυτή την εξίσωση (εύκολα δείχνεται), άρα το $m' \in \mathbb{C}$.

6. Αναπεφαλαιώνοντας έχω $O(0,0)$

$M\left(\frac{συνθ}{1+συνθ}, \frac{ημθ}{1+συνθ}\right)$, $M'\left((1+συνθ)συνθ, (1+συνθ)ημθ\right)$

$m'(συν^2θ, συνθημθ)$. Άρα

συντελεστές κατευθύνσεως:

$\lambda_{OM} = \varepsilon\varphi\theta$, $\lambda_{OM'} = \varepsilon\varphi\theta$, $\lambda_{Om'} = \varepsilon\varphi\theta$. Δηλαδή τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά.

Είναι $\overrightarrow{m'M'} = (x_{M'} - x_{m'},\ y_{M'} - y_{m'}) = (\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta) \Rightarrow$

$|\overrightarrow{m'M'}| = 1$. Άρα για κάθε τιμή του θ, έχω ένα $m' \in C$. Προεκτείνοντας το Om' και παίρνοντας μήκος ίσο με ένα στη προέκταση έχω το αντίστοιχο M'.

Είναι δυνατόν για κατάλληλη τιμή του θ, π.χ. για $\eta\mu\theta > 0$ & $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ το M' να βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά της Om'. Για το σημείο $m'(1,0)$ έχω το $M'(2,0)$. Μέσω της f, έχω το $M(\frac{1}{2},0)$ (κορυφή της παραβολής), αφού τα $M(z)$, $M'(\frac{1}{\bar{z}})$ έχουν αντίστροφα μέτρα και ίδιο όρισμα. Μ' αυτή τη διαδικασία απ' τα m' έχω τα M' και τελικά τα M της παραβολής P.

---

22. Έστω (P) το μιγαδικό επίπεδο, και έστω A και M, τα σημεία του, που είναι εικόνες αντίστοιχα των $1-i$ και $z= 3+i$.

Να οριστεί το σημείο M , εικόνα του αριθμού z_1, ώστε το τρίγωνο AMM_1 να είναι ισοσκελές, το M_1 όντας πάνω στον Oφ .

ΛΥΣΗ.

Είναι προφανές ότι θα πληρείται η σχέση:
$(y+1)^2+1=(y-1)^2+3 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$. Δηλ $z_1=\frac{1}{2}i$

---

23 **1.** Να λυθεί στο C η $z^5=1$. Οι λύσεις να δοθούν σε τριγωνομετρική μορφή. Να απεικονιστούν στο μιγαδικό επίπεδο.

2. Να δειχτεί ότι το άθροισμα των ριζών είναι το μηδέν.

3. Να δειχτεί ότι: $συν\frac{2\pi}{5}+συν\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

4. Να εκφραστεί το $συν\frac{\pi}{5}$ συναρτήσει του $συν\frac{2\pi}{5}$ και μετά, να υπολογιστεί το $συν\frac{2\pi}{5}$ και το $συν\frac{4\pi}{5}$. Ομοίως για τα $ημ\frac{2\pi}{5}$ και $ημ\frac{4\pi}{5}$.

(BACC. C AMIENS)

ΛΥΣΗ

1. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης, οι πέμπτης τάξης ρίζες της μονάδας: $z_0=1$, $z_1=συν\frac{2\pi}{5}+iημ\frac{2\pi}{5}$,

$z_2=z_1^2$, $z_3=z_1^3$, $z_4=z_1^4$. Στο μιγαδικό επίπεδο είναι ως γνωστό, κορυφές κανονικού πενταγώνου.

2. $z_0+z_1+z_2+z_3+z_4=1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4=\frac{z_1^5-1}{z_1-1}=0$.

3. Παίρνοντας τα πραγματικά μέρη του προηγούμενου αθροίσματος έχουμε:

$1+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{5}=0$ ή

$1+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

4. Επειδή $\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{5}-1$ (1) η προηγούμενη σχέση γίνεται: $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{5}-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{5}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}-\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}>0$. Απ την (1) έχω το $\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}$.

---

24. Εστω η $f: C\to C$ με τύπο
$f(z)=z^3-(6+5i)z^2+(7+7i)z+2-4i$.

α. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\lambda\in R$: $f(\lambda)=0$

β. Να βρεθούν δύο μιγαδικοί α, β : $z\in B$ $f(z)=(z-\lambda)(z^2+\alpha z+\beta)$

γ. Να λυθεί στο C, η $f(z)=0$

(SERIE C, STRASBOURGE)

ΛΥΣΗ

α. Το $\lambda=2$. Τα υπόλοιπα απλά.

25.I. Να προσδιοριστούν οι μιγαδικοί αριθμοί $u=\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $u^2=5-12i$

2. Θεωρούμε την εξίσωση (Ε):

$$z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

Να δειχτεί ότι η (Ε) δέχεται για λύση καθαρά φανταστικό αριθμό.

3. Να βρεθούν οι λύσεις της (Ε)

4. Τι συμπεραίνουμε για το τρίγωνο που οι κορυφές του, είναι εικόνες των λύσεων της (Ε),

(BACC. SERIE E)

ΛΥΣΗ.

1. $u^2=5-12i \Leftrightarrow (\alpha+\beta i)^2=5-12i \Leftrightarrow$

$\alpha^2-\beta^2=5$ (1) Αλλά $|u^2|=|5-12i| \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=13$ (3)

$\alpha\beta=-6$ (2)

(1) ∧ (3) $\Rightarrow \alpha=\pm 9$ $\beta=\pm 2\sqrt{2}$ και επειδή $\alpha\cdot\beta<0$

έχουμε τελικά $u=9-i2\sqrt{2}$ $u=-9+i2\sqrt{2}$.

2. Η καθαρά φανταστική λύση είναι $z_1=-2i$

Οπότε η (Ε) μετασχηματίζεται στην

$(z+2i)\left[z^2-(1+4i)z+(-5+5i)\right]$ (με διαίρεση)

3. Οι λύσεις της είναι

$z_1=-2i$, $z_2=5+i(2-\sqrt{2})$ $z_3=-4+(2+\sqrt{2})i$.

4. Το τρίγωνο με κορυφές $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$, $A_3(z_3)$ είναι ισοσκελές, εφόσον $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$. Οι πράξεις είναι απλές.

26. 1. Να βρεθούν οι ρίζες Z', Z'' της $Z^2+(1-3i)Z+(-14+2i)=0$ (όπου Z' η ρίζα με πραγματικό μέρος θετικό).

2. Στο μιγαδικό επίπεδο P, έστω τα Α, Β, Γ εικόνες των $Z', Z'', -3-i$ αντίστοιχα.

α. Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογιστούν οι πλευρές του ΓΑ, ΓΒ.

β. Να προσδιοριστεί το σύνολο των Μ

$$E=\left\{M\in P/\ -2\overrightarrow{M\Gamma}^2+2\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MA}^2=30\right\}$$

(BACC. SERIE E.)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $z'=3+i$, $z''=-4+2i$

2. α. Είναι $\lambda_{A\Gamma}=\frac{1+1}{3+3}=\frac{1}{3}$, $\lambda_{\Gamma B}=\frac{3}{-1}=-3$.

Άρα $A\Gamma\perp\Gamma B$ και το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

β. Η δοθείσα σχέση μετασχηματίζεται:

$$-2\left[(x+3)^2+(y+1)^2\right]+2\left[(x+4)^2+(y-2)^2\right]+\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]=30$$

όπου (x,y) οι συντεταγμένες του σημείου Μ.

Εκτελώντας τις πράξεις, καταλήγω σε εξίσωση κύκλου, που είναι το ζητούμενο σύνολο σημείων.

27. Εστω θ πραγματικός αριθμός: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
Να λυθεί στο C η εξίσωση:
$$(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)z^2 - (2\eta\mu 2\theta)z + 2 = 0$$
Να βρεθούν το μέτρο και το όρισμα των ριζών της.

(BACC. C. ORLÉANS-TOURS)

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα γράφεται: $z^2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2z\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$
Για $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ αυτή δεν έχει λύση.
Για $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ η $\Delta = \eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = -\sigma\upsilon\nu^4\theta$.

Οι ρίζες της λοιπόν είναι $z_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta - i\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} =$

$= \frac{\eta\mu\theta - i\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $z_2 = \frac{\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

<u>Μέτρο, όρισμα:</u> Οι δύο ρίζες έχουν το ίδιο μέτρο
$\rho = \sqrt{\frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, αφού $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$.

άρα οι ρίζες γράφονται: $z_1 = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$z_2 = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ άρα $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta$.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

28. **1.** Να λυθεί στο C η εξίσωση:
$(Z^2-4Z+5)+i(Z+1)=0$

2. Ομοίως η εξίσωση:
$(Z^2-4Z+5)^2+(Z+1)^2=0$

3. Να δειχτεί ότι υπάρχουν οι πραγματικοί Α, Β, Γ, Δ που να προσδιοριστούν, ώστε
$\chi\in R$ $(\chi^2-4\chi+5)^2+(\chi+1)^2=(\chi^2+\Gamma\chi+\Delta)(\chi^2+A\chi+B)$

(BACC. C LILLE IFJR)

---

29. Στο σύνολο C δίνεται η εξίσωση:
(Ε) $Z^3-(7+9i)Z^2+7(-1+6i)Z+13-33i=0$

1. Να δειχτεί ότι η (Ε) δέχεται μια μοναδική πραγματική ρίζα και να υπολογιστεί αυτή.

2. α. Να λυθεί η (Ε)

β. Εστω στο μιγαδικό επίπεδο, τα σημεία Α, Β, και Γ, οι εικόνες των λύσεων της (Ε). (Σημειώνουμε με Α, το σημείο με την μεγαλύτερη τετμημένη). Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ,

3. Εστω (D) η ευθεία με εξίσωση $\chi=6$ και (Ρ) η παραβολή με διευθετούσα την (D) και εστία το Α. Να δειχτεί ότι η (Ρ) περιέχει τα Β και Γ και να καθορίσετε την κορυφή της. Επίσης να σχεδιαστεί η (Ρ).

(BACC. C PARIS 1985)

---

30 **1.** Να εκφραστούν οι ρίζες Z_κ της εξίσωσης $Z^5=1$ συναρτήσει των αριθμών : $\theta_\kappa=2\kappa\pi/5$, όπου $0\leq\kappa\leq4$.

2. τι είναι το πολύγωνο με κορυφές τα A_k, τις εικόνες των Z_k; Κατασκευάστε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, με συντελεστές φυσικούς που να επαληθεύεται απ' το $\alpha=\sigma\upsilon\nu 2\pi/5$

3. Να λυθεί αυτή η εξίσωση. Να υπολογιστούν τα συν$2\pi/5$, συν$4\pi/5$, συν$\pi/5$, και συν$8\pi/5$.

4. Σε κάθε μιγαδικό αριθμό , διαφορετικό του -1, αντιστοιχούμε τον $Z=\frac{u-1}{u+1}$. Να υπολογίσετε τον u, συναρτήσει του Z.

5. Με τη βοήθεια των προηγουμένων να λυθεί στο C, η εξίσωση $(u-1)^5=(u+1)^5$. Να παρασταθούν γραφικά οι ρίζες της.

6. Να ερμηνέψτε αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα καθορίζοντας το σύνολο E των σημείων M(u) τέτοιων ώστε: $\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=1$

(GROUPE I, SÈRIE E 1985)

---

31. I. Αν το u είναι μιγαδικός αριθμός με μέτρο 1 και όρισμα $\theta\in(0,2\pi)$, να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού Z που ορίζεται απ' την $\frac{Z-i}{Z+i}=u$

2. Θεωρούμε την εξίσωση στο C:

(E) $(Z^2+1)^\nu-(Z+i)^{2\nu}=0$ $\nu\in N$. Παρατηρώντας ότι το $-i$ είναι λύση της (E) να λυθεί η (E).

(BACC. C NICE 1984)

---

32. I. Να βρεθεί και να παρασταθεί γραφικά το σύνολο H των σημείων M του P, που είναι εικόνες των Z , που πληρούν την $Z\bar{Z}-(Z^2+\bar{Z}^2)+1=0$.

Να καθοριστούν οι κορυφές , οι εστίες

ασύμπτωτες. Να βρεθούν οι γωνίες των ασυμπτώτων με τον Οχ.

2. Εστω Μ ένα σημείο του Η, εικόνα του Ζ. Θέτω $|Z|=\tau$ και έστω ϑ το όρισμα του Ζ. Να υπολογιστεί το τ, συναρτήσει του συνθ.

(BACC. C TOULOUSE 1984)

---

33. Εστω η εξίσωση στο C:

$$(E) \quad Z^4-6(1+i)Z^3+27iZ^2+27(1-i)Z-22+6i=0$$

1. Να δειχτεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης : $Z^2-(1+2i)Z+2i=0$ είναι και ρίζες της (Ε).

2. Να επιλύσετε την (Ε), θέτοντάς την στη μορφή $[Z^2-(1+2i)Z+2i][Z^2+\alpha Z+\beta]=0$ $\alpha,\beta\in C$.

3. Τι είδους είναι το πολύγωνο, που σχηματίζεται απ'τις εικόνες των λύσεων της Ε;

(GLOUPE I, BIS 1984)

---

34 $\vartheta\in[0, 2\pi)$

1. Να λυθεί στο C, η εξίσωση με άγνωστο το Z: $Z^2-(2^{\vartheta+1}\text{συν}\vartheta)Z+2^{2\vartheta}=0$. Να δοθούν οι λύσεις σε τριγωνομετρική μορφή.

2. Στο μιγαδικό επίπεδο, θεωρούμε τα σημεία Α και Β, εικόνες των λύσεων της εξίσωσης. Να υπολογιστεί το ϑ ώστε το ΟΑΒ να είναι ισόπλευρο.

(BACC. C BORDEAUX)

---

35. Εστω η απεικόνιση του $C-\{-4i\}$ στο C που ορίζεται απ'τον τύπο: $F(Z)=\frac{Z-2i}{iZ-4}$

1. Να βρεθεί και να παρασταθεί γραφικά το σύνολο E των σημείων M, που είναι εικόνες των Z, έτσι ώστε F(Z) είναι πραγματικός αριθμός.

2. Ομοίως το σύνολο E_2 των σημείων M, ώστε το όρισμα του F(Z) να ισούται με π/2.

3. Ομοίως το E_3 ώστε το μέτρο του F(Z)=2

(BACC. E BORDEAUX)

---

36 **1.** Να επιλυθεί στο C η εξίσωση:
$Z^3-(3+2i)Z^2+(2+4i)Z=0$

2. Εστω A, B, Γ οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των λύσεων αυτής. Να δειχτεί ότι υπάρχει σημείο Δ, με μηδενική τεταγμένη, διάφορο απ'τα A, B, Γ που ανήκει στον κύκλο που ορίζουν αυτά. Να βρεθεί η τεταγμένη του Δ.

(BACC C. CAEN)

---

36. **1.** **α.** Εστω ο α∈R. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(E_{\alpha})\quad \begin{cases} Z\in C \\ Z^2-2Z\text{συν}\alpha+1=0 \end{cases}$$

β. Να δοθούν σε τριγωνομετρική μορφή οι ρίζες της

$$(E_{\alpha,\nu})\quad \begin{cases} Z\in C \\ Z^{2\nu}-2Z^{\nu}\text{συν}\alpha+1=0 \quad \nu\in N^* \end{cases}$$

2. Για κάθε $\nu\in N^*$, $\alpha\in R$, $Z\in C$ θέτουμε $P_\alpha(Z)=Z^{2\nu}-2Z^\nu\sigma\upsilon\nu\alpha+1$. Δεχόμαστε ότι $P_\alpha(Z)=(Z^2-2Z\sigma\upsilon\nu\alpha/\nu+1)\ldots[(Z^2-2Z\sigma\upsilon\nu(\alpha/\nu+2\kappa\pi/\nu)+1]\ldots\ldots[Z^2-2Z\sigma\upsilon\nu(\alpha/\nu+\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+1]$ και σημειώνουμε
$P_\alpha(Z)=\prod_{\kappa=0}^{\nu-1}[Z^2-2Z\sigma\upsilon\nu(\frac{\alpha}{\nu}+\frac{2\kappa\pi}{\nu})+1]$.

α. Να υπολογιστεί το $P_\alpha(1)$ και να δειχτεί ότι $\prod_{\kappa=0}^{\nu-1}\eta\mu^2(\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\kappa\pi}{\nu})=\frac{\eta\mu^2(\frac{\alpha}{2})}{4^{\nu-1}}$

β. Για κάθε $\alpha\in[0,\pi)$ και για κάθε $\nu\geq 2$ θέτουμε $H_\nu(\alpha)=\prod_{\kappa=1}^{\nu-1}\eta\mu(\frac{\alpha}{2\nu}+\frac{\kappa\pi}{\nu})$

Να δειχτεί ότι για $\alpha\neq 0$, $2^{\nu-1}H_\nu(\alpha)=\frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2\nu}}$

γ. Ποιό είναι το όριο του $H_\nu(\alpha)$ όταν $\alpha\to 0$;

δ. Να δειχτεί ότι $\nu=2$
$\eta\mu\frac{\pi}{\nu}\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}\ldots\ldots\ldots\eta\mu\frac{(\nu-1)}{\nu}=\frac{\nu}{2^{\nu-1}}$

(BACC E. PARIS)

ΤΡΙΩΝΥΜΟ

1

Δίνεται η εξίσωση β'βαθμού

$x^2 + (\mu-3)x + 1-2\mu = 0$ (μ παράμετρος)

1. Να δεχτεί ότι δέχεται πάντα δύο ρίζες

2. Πάνω σ'έναν άξονα Οx, θεωρούμε τα σημεία Μ;Μ'' με τετμημένες τα Χ;Χ''(ρίζες της αρχικής). Για ποιά μ, οι κύκλοι με διαμέτρους τα ΟΜ;ΟΜ''εφάπτονται εξωτερικά; (Να μην βρεθούν οι ρίζες).

Αν S είναι το άθροισμα των εμβαδών αυτών των κύκλων να μελετηθούν οι μεταβολές της $y = \frac{4S}{\pi}$ (συναρτήσεις του μ).

3. Για ποιά μ, ισχύει η $\frac{X'}{2X''} + \frac{X''}{2X'} + 3 = 0$;

4. Υπάρχει σχέση μεταξύ των X', X'' που να είναι ανεξάρτητη του μ; Για ποιά μ, η μιά ρίζα είναι τριπλάσια της άλλης; Να υπολογιστούν τότε οι ρίζες.

Baccalaureat Pontichery.

ΛΥΣΗ

1. $\Delta = (\mu+1)^2 + 4 > 0$. Αρα έχω πάντα δύο ρίζες.
Για να εξετάσω το πρόσημο παρατηρώ: $P = 1-2\mu$ και $S = -\mu+3$
Αν λοιπόν $1-2\mu > 0$ $\mu < \frac{1}{2}$ το S είναι θετικό και επομένως οι δύο ρίζες είναι θετικές. Ενώ για $\mu > \frac{1}{2}$ οι δύο ρίζες ετερόσημες.

2. Οι δύο κύκλοι θα εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν, τα σημεία Μ'και Μ'', βρίσκονται εκατέρωθεν του Ο, δηλ. αν οι ρίζες είναι ετερόσημες δηλ. αν $\mu > \frac{1}{2}$.

Το άθροισμα των εμβαδών είναι:

$S = \frac{\pi(x'^2 + x''^2)}{4} = \frac{\pi(S^2 - 2P)}{4} = \frac{\pi}{4}(\mu^2 - 2\mu + 7)$. Αρα η $y = \frac{4S}{\pi} = \mu^2 - 2\mu + 7$.

Θα μελετήσω λοιπόν τις μεταβολές της y, μόνον όμως για $\mu>\frac{1}{2}$ αφού τότε ισχύει. Αυτές δίνονται από το πίνακα.

μ	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y	$\frac{25}{4}$	↘	6 ελ.	↗	$+\infty$

και η γραφική παράσταση της y είναι, τμήμα της παραβολής.

3. Η σχέση που δίνεται γράφεται:
$x'^2+x''^2+6x'x''=0$ ή $S^2+4p=0$ ή $(3-\mu)^2+4(1-2\mu)=0$ ή $\mu^2-14\mu+13=0$. Οι ρίζες είναι $\mu'=1$ και $\mu''=13$. Για $\mu=1$ η αρχική γράφεται $x^2-2x-1=0$ με ρίζες $1\pm\sqrt{2}$ κ.λ.π.

4. Μια σχέση των ριζών ανεξάρτητη του μ, δίνεται από $S=3-\mu$ $p=1-2\mu$ άρα $2S-p=5$ δηλ.

$2(x'+x'')-x'x''=5.$

Οταν η μία ρίζα ειναι τριπλάσια της άλλης έχω:

$x'=3x''$

$x'+x''=3-\mu$

$x'x''=1-2\mu$ Απ'τις δύο πρώτες έχω

$x'=3x''=3\,\frac{3-\mu}{4}$. Αντικαθιστώντας στην τρίτη έχω

$\frac{3}{16}(3-\mu)^2=1-2\mu$ ή $3\mu^2+14\mu+11=0$ με ρίζες τα

$\mu=-1$ και $\mu=-\frac{11}{3}$. Αν $\mu=-1$ $x'=3$ $x''=1$

αν $\mu=-\frac{11}{3}$ $x'=5$ $x''=\frac{5}{3}$.

2

Έστω οι εξισώσεις (1) $x^2+\mu x-1=0$ (2) $x^2-x-1=0$

1, Να δειχτεί ότι αυτές έχουν πάντα ρίζες και να μελετηθεί το πρόσημό τους. Να βρεθούν οι ρίζες της(2).

2. Θέτω $f_{(x)}=x^2+\mu x-1$ και $g_{(x)}=x^2-x-1$. Έστω x', x'', ($x'<x''$) οι ρίζες της (1) και α, β (α<β) οι ρίζες της (2). Να δειχτεί ότι $f(\alpha)=\alpha(\mu+1)$. Να δειχτεί δε ότι αν $\mu>-1$ τότε ο αριθμός α βρίσκεται ανάμεσα στα x', x''. Επίσης να δειχτεί ότι αν $\mu>-1$. ο β, είναι μεγαλύτερος από το x''. Να επαναλάβετε την προηγούμενη μελέτη για τις σχετικές θέσεις των α, β, x', x'', όταν $\mu<-1$.

3. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα τις γραφικές παραστάσεις (F) και (G) των συναρτήσεων $y=x^2-1$ και $y=x^2-x-1$. Να δείξετε ότι έχουν ένα κοινό σημείο του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

4. Να εξετάσετε πως αυτές οι γραφικές παραστάσεις πιστοποιούν τα πορίσματα της (2) ερώτησης, σχετικά με τις θέσεις των α, β, x', x'', για μια ωρισμένη τιμή του μ.

(Baccalauréat France métrop)

ΛΥΣΗ

1. Οι ακραίοι συντελεστές κάθε εξίσωσης είναι ετερόσημοι. Άρα έχουν πάντα ρίζες. Οι ρίζες αυτές κάθε εξίσωσης είναι ετερόσημες(P<0) δηλ. $x'<0<x''$. Οι ρίζες της (2) είναι $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. $f(\alpha)=\alpha^2+\alpha\mu-1$. Επίσης $g(\alpha)=\alpha^2-\alpha-1=0$ $\alpha^2=\alpha+1$. Θέτω τη τιμή αυτή του α στην προηγούμενη σχέση

έχουμε $f(\alpha)=\alpha+1+\alpha\mu-1=\alpha(\mu+1)$

Αν τώρα $\mu>-1$; $\mu+1>0$. Άρα $f(\alpha)=\alpha(\mu+1)<0$ αφού $\alpha<\beta$ και οι α,β, είναι ετερόσημοι. Η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι $x'<\alpha<x''$

Ομοίως δειχνουμε ότι $f(\beta)=\beta(\mu+1)>0$ άρα ο β βρίσκεται εκτός των x', x'', δηλ. τελικά έχω $x'<\alpha<x''<\beta$.

Οταν $\mu<-1$ ή $\mu+1<0$ το $f(\alpha)=\alpha(\mu+1)>0$ και το $f(\beta)<0$ δηλ. τότε έχουμε $\alpha<x'<\beta<x''$.

3. Οι δυο καμπύλες (F) και (G) είναι δύο παραβολές. (Κατασκευάζονται ευκολα). Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου δινονται από τη λύση της $x^2-1=x^2-x-1$ $\quad x=0$

Αρα αυτό είναι το $(0,-1)$. Τα σημεία τομής με τον άξονα Οx είναι τα σημεία μετετμημένες το $-1,1$ για τη μια και τα $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ για την άλλη

4. Η καμπύλη (F) προκύπτει για την τιμή $\mu=0$ δηλ. είναι η περίπτωση όπου μ -1. Εκεί ισχύει $x'<\alpha<x''<\beta$. Πράγματι ισχύει $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

— 3 —

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+\kappa=0$ τότε τα α_1, α_2 είναι ρίζες της $(x-x_1)(x-x_2)-\kappa=0$

Η άσκηση επεκτείνεται στα α_1, α_2, ... α_ν).

(Ecole speciale de mécaniq'ue).

ΛΥΣΗ

Αφού τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $(x-a_1)(x-a_2)+\kappa$ τότε έχουμε την ταυτότητα παραγοντοποίησης $(a=1)$

$(x-a_1)(x-a_2)+\kappa=(x-x_1)(x-x_2)$

$(x-a_1)(x-a_2)=(x-x_1)(x-x_2)-\kappa$. Αυτή η σχέση δείχνει (Παραγοντοποίηση) ότι τα a_1, a_2 είναι ρίζες του $(x-x_1)(x-x_2)-\kappa$

---

4. Εστω η $y=ax^2+\beta x+3$

1. Να προσδιοριστούν τα a,β ώστε $y_{max}=4$ για $x=1$. Να παρασταθεί γραφικώς (P) η συνάρτηση που θα προκύψει.

2. Εστω $A(0,\frac{17}{4})$. Να γραφεί η εξίσωση των ευθειών πού περνάν από το Α.(παράμετρος μ). Για ποιό μ, η ευθεία εφάπτεται στην (P);

3. Να δειχτεί ότι από το Α περνούν δυο εφαπτόμενες στην (P) κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθούν τα σημεια τομής τους με τους άξονες.

4. Εστω Β σημείο της παράλληλης προς τον Οx, από το Α. Να δειχτεί ότι οι εφαπτόμενες από το Β, στην (P) είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Baccalauréat Libanais)

ΛΥΣΗ

α. Το τριώνυμο παίρνει άκρα τιμή για $x=-\frac{\beta}{2a}$

Αρα $-\frac{\beta}{2a}=1$ ενώ $f(1)=a+\beta+3$. Εχω λοιπόν το σύστημα

$\beta=-2\alpha$

$4=\alpha+\beta+3$ δηλ. $\alpha=-1$, $\beta=2$. Η συνάρτηση είναι λοιπόν η $y=-x^2+2x+3$.

Η γραφική της παράσταση είναι παραβολή, με τα κοίλα κάτω άξονα συμμετρίας τον $x=1$ και κορυφή το σημείο (1,4). Κόβει τον Οx στα (-1,0),(3,0).

β. Οι εξισώσεις των ευθειών που περνάν από το Α, είναι $y=\mu x+\frac{17}{4}$. Αν αυτή η τυχούσα ευθεία τέμνει την (P) οι τετμημένες των σημείων τομής θα είναι οι ρίζες της $-x^2+2x+3=\mu x+\frac{17}{4}$. Θα εφάπτεται λοιπόν στην (P) αν η προηγούμενη εξίσωση έχει διπλή ρίζα (1 κοινό σημείο) δηλ. αν $\Delta=0$ ή $(\mu-2)^2-5=0$ $\mu'=2-\sqrt{5}$ $\mu''=2+\sqrt{5}$

γ. Ομως τα μ' και μ'' είναι συντελεστές κατεύθυνσης των δύο εφαπτομένων από το Α. Και είναι $\mu'.\mu''=-1$, άρα αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους. Η πρώτη τέμνει τον Οx στο σημείο με τετμημένη $x'=-\frac{17}{4\mu'}=\frac{17(\sqrt{5}+2)}{4}$ και η άλλη με $x''=\frac{17(2-\sqrt{5})}{4}$

δ. Εστω λ οι συντελεστές κατεύθυνσης των ευθειών που περνούν από το $B(\alpha,\frac{17}{4})$. Τότε η εξίσωση των ευθειών αυτών είναι $y=\lambda(x-\alpha)+\frac{17}{4}$. Τα κοινά σημεία αυτών και της (P), (οι τετμημένες) δίνονται από τη λύση της $-x^2+2x+3=\lambda(x-\alpha)+\frac{17}{4}$ ή $x^2+(\lambda-2)x-\lambda\alpha+\frac{5}{4}=0$. Αρα έχουμε επαφή όταν $\Delta=0$ $\lambda^2-4\lambda(1-\alpha)-1=0$. (1) Αρα για κάθε α, δηλ. για οποιαδήποτε θέση του Β, πάνω στην ευθεία της άσκησης, οισυντελεστές κατεύθυνσης των δυο εφαπτομένων, (ρίζες της 1) έχουν γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2=-1$ δηλ. οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

5\. 1.Αν μ είναι παράμετρος, σχηματίσατε την εξίσωση β' βαθμού, που δέχεται για ρίζες τους αριθμούς

$x'=\mu+3$, $x''=x'^2-6x'+10$

2\. Πότε η εξίσωση αυτή δέχεται διπλή ρίζα, αντίθετες ρίζες, μία ρίζα μηδέν;

3\. Να διερευνηθεί η διαφορά $x'-x''$ για τα διάφορα μ

4\. Πότε η διαφορά αυτή είναι μέγιστη και ποιά είναι τότε;

5\. Οι ρίζες x', x'' είναι συναρτήσεις του μ. Παραστήσετε γραφικά, πάνω στο ίδιο σύστημα, τις μεταβολές των συναρτήσεων αυτών, όταν το μ, μεταβάλλεται. Με τη βοήθεια των παραστάσεων αυτών, επαληθεύστε τα πορίσματα των 2,3,4, ερωτήσεων.

(Bacc.série tech.France métro

ΛΥΣΗ

1\. $x''=x'^2-6x'+10=\mu^2+1$. Αρα $x'+x''=\mu^2+\mu+4$ και $x'x''=(\mu+3)(\mu^2+1)$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$x^2+(\mu^2+\mu+4)x+(\mu+3)(\mu^2+1)=0$ (1).

2\. Διπλή ρίζα σημαίνει $x'=x''$ $\mu+3=\mu^2+1$ $\mu^2-\mu-2=0$ που ισχύει για $\mu'=2$ $\mu''=-1$.

Αντίθετες ριζες σημαίνει $x'+x''=0 \Rightarrow \mu^2+\mu+4=0$ η οποία δεν έχει ρίζες. Αρα ποτέ δεν συμβαίνει να υπάρχουν στην (1) αντίθετες ρίζες.

Για μηδενική η μία ρίζα: Αποκλείεται η $x''=\mu^2+1>0$ πάντα.

Αρα $x'=\mu+3=0 \Rightarrow \mu=-3$ οπότε η $x''=10$

3. $x'-x''=-\mu^2+\mu+2$. Η παράσταση αυτή ειναι μηδέν για $\mu'=-1$ και $\mu''=+2$ θετική όταν $-1<\mu<2$ και αρνητική για τα υπόλοιπα μ.

Δηλ. οι ριζες έχουν ως εξής:

$x'=x''$ όταν $\mu=-1$ ή $\mu=2$

$x'>x''$ όταν $-1<\mu<2$

$x'<x''$ όταν $\mu<-1$ ή $\mu>2$.

4. Η διαφορά επίσης γράφεται $x'-x''=-(\mu-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$ δηλ. είναι ίση με $\frac{9}{4}$ όταν $\mu=\frac{1}{2}$ και μικρότερη από το 9/4 όταν $\mu\neq\frac{1}{2}$

5. Η $x'=\mu+3$ είναι η ευθεία (D) που περνάει από τα σημεία (-3.0) ,(-1,2),(2,5).Η $x''=\mu^2+1$ είναι η παραβολή (P), με τα " κοίλα πάνω" και κορυφή το Α(0,1).Τα κοινά σημεία των (D) και (P) είναι $x'=x''=2$ όταν $\mu=-1$ και $x'=x''=5$ όταν $\mu=2$ (2η ερώτηση).Παρατηρούμε λοιπόν για τα διαφορά μ, ότι το σημείο με τεταγμένη x'που βρίσκεται πάνω στην (D) βρίσκεται "πάνω" (μεγαλύτερη τεταγμένη) από το σημείο με τεταγμένη x'' που βρίσκεται πάνω στην (P) όταν $-1<\mu<2$ όπως απεδείχθη στην 3η ερώτηση.Επίσης η $x'=0$ μόνο για $\mu=-3$. (Η γραφική παράσταση των x',x''γίνεται σε ορθ. άξονες οπου οι τετμημένες είναι τα μ, και οι τεταγμένες τα x (x',x'').Αν επισης χαράξουμε την ευθεία (D') συμμετρι της (D) ως προς τον Oμ, παρατηρούμε ότι δεν τέμνει την (P) δηλ. ποτέ δεν έχουμε $x'=x''$(2η ερώτηση)

---

6. Θεωρούμε την $y=-x^2+2(\mu+1)x+\mu-5$

1.Να μελετηθούν οι μεταβολές της (μονοτονία, ακρότατ και στη συνέχεια να παρασταθούν γραφικά οι C_0 και C_2 καμπύλες που αντιστοιχόυν στις τιμές $\mu=0$ και $\mu=2$.

2. Να δειχτεί ότι, οταν το μ μεταβάλλεται, οι καμπύλες (Cμ) των συναρτήσεων y περνούν από σταθερό σημείο I.

3 α. Για ποιά μ, η καμπύλη (Cμ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα Οx; Να βρεθούν αυτά τα μ, στα οποία αντιστοιχούν σημεία κοινά με τον αξονα Οx. Εστω Α,Β δύο τέτοια σημεία Ποιές είναι οι τετμημένες τους;

β. Για ποιά μ, η καμπύλη (Cμ) τέμνει τον Οx στα M',M''(δύο σημεία;)

4. Να δειχτεί ότι όταν το μ, μεταβάλλεται τα σημεία M',M'', παραμένουν συζυγή αρμονικά των Α,Β.

(France mètrop session de remplacement)

Λ Υ Σ Η

1. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή την $\mu^2+3\mu-4$ για $x=\mu+1$. Η μέγιστη αυτή τιμή της συνάρτησης, οντας τριώνυμο, θα υφίσταται τις ανάλογες μεταβολές όταν μεταβάλλεται το μ.

Επίσης όταν $x\to\pm\infty$ το $y\to-\infty$

Για μ=0 έχω την $y=-x^2+2x-5$. Παραβολή με άξονα την x=1 κορυφή το (1,-4) και τέμνει τον Οy στο (0,-5). Είναι η Co.

Για μ=2 έχω την $y=-x^2+6x-3$. Παραβολή με άξονα συμμετρίας των x=3, κορυφή το (3,6) και τέμνει τον Οy στο (0,-3). Είναι η C_2.

2. Η παράμετροι μ, μιας καμπύλης (Cμ) που περνάει από δοθέν σημείο $P(x_0,y_0)$ εκφράζεται από τη σχέση:

$\mu(2x_0+1)=y_0+x_0^2-2x_0+5$. Αν $x_0 \neq -\frac{1}{2}$ αυτή η εξίσωση έχει μία λύση. Δηλαδή από κάθε σημείο P του οποίου η τετμημένη είναι διάφορη του $-\frac{1}{2}$ περνάει μια μοναδική καμπύλη (Cμ).

Αν $x_0=-\frac{1}{2}$ ή προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$\mu\cdot 0=y_0+\frac{25}{4}$. Αυτή είναι αδύνατη όταν $y_0 \neq -\frac{25}{4}$, ενώ δέχεται άπειρες λύσεις όταν $y_0=-\frac{25}{4}$, ενώ δέχεται άπειρες λύσεις όταν $y_0=-\frac{25}{4}$. Δηλαδή όταν το P έχει τετμημένη το $-\frac{1}{2}$ και τεταγμένη το $-\frac{25}{4}$, τότε όλες οι καμπύλες (Cμ) περνούν από το $(-\frac{1}{2},-\frac{25}{4})$, το οποίο είναι το ζητούμενο I.

γ.α. Η καμπύλη (Cμ) έχει ένα κοινό σημείο με τον Ox, όταν και μόνον όταν, η κορυφή της βρίσκεται πάνω σ'αυτόν τον άξονα. Η τεταγμένη της κορυφής, είναι η παράσταση $\mu^2+3\mu-4$. Αρα πρέπει $\mu^2+3\mu-4=0$ δηλαδή συμβαίνει όταν $\mu'=1$ και $\mu''=-4$

Αν $\mu=1$ η (C_1) έχει κορυφή το A(2,0)

Αν $\mu=-4$ η (C_{-4}) έχει κορυφή το B(-3,0).

β. Για να έχει η (Cμ) δύο κοινά σημεία με το Ox, και επειδή στρέφει τα "κοίλα κάτω" πρέπει η τεταγμένη της κορυφής να είναι θετική δηλ. $\mu^2+3\mu-4>0$ δηλ. για $\mu<-4$ ή $\mu>1$-

δ. Εστω x' και x'' οι τετμημένες των M', M''. Για να είναι αυτά συζυγή αρμονικά των A και B πρέπει να ισχύει η $2(x'x''+x_1x_2)=(x'+x'')(x_1+x_2)$ (1) (θεωρία)

Όμως τα x', x'', όταν υπάρχουν είναι ρίζες της αρχικής $-x^2+2(\mu+1)x+\mu-5=0$. Άρα $x'+x''=2(\mu+1)$ και $x'x''=5-\mu$. Επίσης $x_1+x_2=2-3=-1$ και $x_1x_2=-6$ άρα η σχέση (1) πληρείται ο.ε.δ

7.

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+5-(\mu-1)^2=0$

1. Να βρεθεί (μελετηθεί) το πλήθος των ριζών
2. Να οριστεί ο μ, ώστε η εξίσωση να δέχεται δύο θετικές ρίζες
3. Κάνοντας χρήση της γραφικής παράστασης της $y=x^2-6x+5$, να επαληθεύσετε τα πορίσματα των δύο πρώτων ερωτήσεων.
4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις (E) $y=(\mu-2)x^2+4x+3+\mu$

α. Να οριστεί το μ ώστε, οι παραβολές της εξίσωσης (E) να τέμνουν τον άξονα Ox, σε δύο σημεία M' και M''. Έστω x' και x'' οι τετμημένες τους.

β. Να βρεθεί μια σχέση ανεξάρτητη του μ, μεταξύ των x' και x''

γ. Τι πρέπει να ισχύει ώστε, μια παραβολή από την εξίσωση (E) εφάπτεται στον Ox; Στην περίπτωση αυτή να δειχτεί ότι τα σημεία επαφής που προκύπτουν, σχηματίζουν με τα M' και M'' αρμονική τετράδα;

(Bacc. Antilles et Guyane).

ΛΥΣΗ

1. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4+(\mu-1)^2$. Άρα πάντα υπάρχουν δύο ρίζες. Αν $\mu=1$ οι δύο ρίζες είναι 1 και 5. Για άλλες τιμές του μ, επειδή $F_{(1)}=F_{(5)}=-(\mu-1)^2$ το οποίο είναι αντίθετου προσήμου με τον συντελεστή του x, οι ρίζες x', x'' πληρούν την $x'<1<5<x''$.

2. Η x'', αφού είναι μεγαλύτερη από το 5, είναι πάντα θετική. Οι δύο ρίζες θα είναι θετικέςμ αν και μόνο αν, το γινόμενό τους είναι θετικό δηλ. $(\mu-1)^2<5$
$1-\sqrt{5}<\mu<1+\sqrt{5}$

γ. Η $y=x^2-6x+5$, ειναι μια παραβολή (Ρ) με τα "κοίλα άνω" με αξονα συμμετρίας την $x=3$, και κορυφή το $A(3,-4)$. Τέμνει τον Ox στα σημεία $B(1,0)$ και $\Gamma(5,0)$ και τον Oy στο $\Delta(0,5)$.

Εστω λοιπόν επίσης η ευθεία (Δ) με εξίσωση $y=(\mu-1)^2$.

Οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των καμπύλων (Ρ) και (Δ) και που όπως φαίνεται απ'την γραφική εικόνα:

α. Οι ρίζες αυτές πάντα υπάρχουν, αφού πάντα υπάρχουν δύο σημεία τομής της ευθείας (Δ) και της παραβολής (Ρ), διότι η ευθεία (Δ) έχει πάντα θετική τεταγμένη.

β. Οι τετμημένες των κοινών σημείων (ρίζες της αρχικής) θα είναι θετικές αν η τεταγμένη της (Δ) είναι μικρότερη απ'την τεταγμένη επί την αρχή της (Ρ) δηλ. αν $(\mu-1)^2<5$.

γ. Η μια τετμημένη των κοινών σημείων (η μιά ρίζα της αρχικής) είναι πάντα μεγαλύτερη του 5 και η άλλη μικρότερη του 1.

δ.ⅰ. Οι παραβολές (Ε) τέμνουν τον Ox αν και μόνο αν, η εξίσωση (Ε) έχει δύο λύσεις δηλ. $4-(\mu-2)(\mu+3)>0$ (1, Βέβαια πρέπει $\mu\neq2$, γιατί για $\mu=2$ έχω την ευθεία $y=4x+5$ η οποία τέμνει τον Ox στο $(-\frac{5}{4},0)$. Η (1) γράφεται:
$\mu^2+\mu-10<0$ με $\mu_1=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$ $\mu_2=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$ άρα η (1) θα θα ισχύει αν $\mu_1<\mu<\mu_2$. Οταν το μ ισουται με μ_1 ή μ_2

η παραβολή (Ε) που αντισοιχεί, εφάπτεται στον Οχ.

2. Οταν $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ (με $\mu \neq 2$), οι τετμημένες x' και x'' των σημείων τομής της (Ε) με τον Οχ πληρούν την εξίσωση: $(\mu-2)x^2+4x+3+\mu=0$. Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αυτών είναι $S=\dfrac{-4}{\mu-2}$ και $P=\dfrac{\mu+3}{\mu-2}$

Με απαλοιφή του μ έχω: $5S+4(p-1)=0$ η

$5(x'+x'')+4x'x''-4=0$ σεδ (2)

γ. Οταν το μ ισούται με μ_1 ή μ_2 τότε οι αντίστοιχες παραβολές εφάπτονται στον Οχ, στα M_1 και M_2. Οι τετμημένες x_1 και x_2 αυτών των σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2+5x-2=0$, που προκύπτει απ'τη (2) θέτοντας $x'=x''$.

Εχουμε λοιπόν $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ και $x_1x_2=-1$. Αρα η σχέση (2) μπορεί να γραφεί $-(x_1+x_2)(x'+x'')+2(x'x''+x_1x_2)=0$ η

$2(x'x''+x_1x_2)=(x'+x'')(x_1+x_2)$ δηλ. τα M', M'' παραμένουν αρμονικά συζυγή, προς τα M_1, M_2.

8

Θεωρούμε την εξίσωση β' βαθμού

(Ε) : $(a-1)t^2+2(\beta-a)t+(a+1)=0$ οπου t είναι ο άγνωστος και τα (a,β) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου Μ ενος επιπεδου.

1. Ποιά σχέση πρέπει να πληρούν τα a,β ώστε η (Ε) να έχει διπλή ρίζα; Να βρεθεί ο γ. τόπος των σημείων του επιπέδου που επαληθεύουν τη σχέση αυτή.

2. Ποιά είναι η αντίστοιχη σχέση μεταξύ των a,β ώστε η (Ε) να έχει 2 ρίζες; Σε ποιό περιοχή του επιπέδου πρέπει να παρουμε το $M(a,\beta)$ ώστε να συμβαίνει αυτό;

ΛΥΣΗ

1. Κατ'αρχήν πρέπει $a\neq 1$, ώστε η (Ε) να είναι δευτέρου βαθμού. Στη συνέχεια πρέπει η διακρίνουσα της (Ε) να μηδενίζεται: $(\beta-a)^2-(a-1)(a+1)=0$ η $(\beta-a)^2-(a-1)^2=0$
Αρα τα (a,β) πρέπει να πληρούν τη σχέση $(y-x)^2-x^2+1=0$
Ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου που πληρούν τη σχέση αυτή προκύπτει απ'τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων που προκύπτουν, αν τη προηγούμενη σχέση την λύσω ως προς y. Αυτές είναι $y=x+\sqrt{x-1}$ και $y=x-\sqrt{x-1}$ (γ). Οι γραφικές παραστάσεις αυτών, είναι καμπύλες που βρίσκονται αντίστοιχα στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, και αναλυτικά θα προσδιοριστούν σε επόμενη άσκηση, γιατί η θεωρία τους ξεφεύγει απ'τη θεωρία του τριωνύμου.

2. Για να'έχει η (Ε) δύο ριζες πρέπει $(\beta-a)^2>a^2-1$ (1)
Αυτή γράφεται και διερευνάται ανάλογα με την τιμή του a^2-1.

Ετσι αν $a^2-1<0$ η $-1<a<1$, το σημείο Μ βρίσκεται στο χώρο του επιπέδου ανάμεσα στις ευθείες $x=1$ και $x=-1$.

Αν όμως $a^2-1>0$, δηλαδή αν το Μ βρίσκεται εκτός των προηγουμένων παραλλήλων η (1) γράφεται:

$$(\beta-a)^2-(\sqrt{a-1})^2>0 \quad ή$$

$$(\beta-a-\sqrt{a^2-1})(\beta-a+\sqrt{a^2-1})>0$$ που πληρείται όταν οι δύο όροι του γινομένου είναι ομόσημοι, δηλ. οταν το β ειναι μεγαλύτερο απ'τις $a+\sqrt{a^2-1}$, και $a-\sqrt{a^2-1}$ ή μικρότερο από τις δυο αυτές εκφράσεις. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Μ πρέπει να βρίσκεται "πάνω" ή "κάτω" από τις καμπύλες(γ)

(Η έννοια του "πάνω" από την καμπύλη γ σημαίνει ότι το εν λόγω σημειο, έχει τεταγμένη μεγαλύτερη από την τεταγμένη του σημείου της καμπύλης, το οποίο όμως έχει

την ίδια τετμημένη με το Μ.Δηλ. αν Μ(α,β) το σημειο που εξετάζεται και Α(α,y(α)) το σημείο της καμπύλης ισχύει β>y(α)).

9

1. Δίνεται η παράσταση $E=(x+2)(x+1)-2x(x+2)$.
Να μελετηθεί το πρόσημο της παράστασης.

2. Να μελετηθούν οι μεταβολές των συναρτήσεων $y=2x(x+2)$ και $z=(x+2)(x+1)$ και να χαρακτούν στο ίδιο σύστημα οι καμπύλες (C) και (C′)των δύο συναρτήσεων. Απ'τη γραφική τους αυτή παραάσταση να εξάγετε συμπεράσματα για το πρόσημο της (Ε) και να τα συγκρίνετε με τα συμπεράσματα της ερώτησης (1).

3. Να υπολογισετε τους συντελεστές α, β, γ, του τριωνύμου $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έτσι ώστε το μέγιστο του τριωνύμου να ισούται με 8, και η γραφική παράσταση να περνάει απ'τα κοινά σημεια Α και Β των καμπύλων (C) και(C′).

4. Να δειχτεί ότι η ευθεία $y=\mu(x+2)$ περνάει από ένα κοινό σημείο των (C)και (C′).Να βρεθεί αυτό. Στη συνεχεια αυτή τέμνει τις δύο καμπύλες σε ένα δεύτερο σημείο, στο Μ την (C) και στο (Μ′) την (C′). Να υπολογίσετε συναρτήσεις του μ, τις συντεταγμένες των Μ και Μ′και του μέσου Ρ του ΜΜ′. Να βρεθεί η εξίσωση του γ. τόπου του Ρ.Να χαραχτεί ο γ. τόπος του Ρ.

Λ Υ Σ Η

1. Η Ε γράφεται $E=(x+2)(1-x)$:Αρα μηδενίζεται στα -2 και 1, είναι θετική για $-2<x<1$ και αρνητική για $x<-2$ και $x>1$.

2. Η $y=2x(x+2)$ έχει τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-2 ελ.	$\nearrow$	$+\infty$

Η $z=(x+2)(x+1)$

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
z	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ ελ.	$\nearrow$	$+\infty$

και η (C) είναι παραβολή με τα "κοίλα άνω" που τέμνει τον Οx στα -2,0, και έχει άξονα συμμετρίας την $x=-1$.
έχει πίνακα μεταβολών:
και η (C΄) ειναι παραβολή με τα "κοίλα άνω" άξονα συμμετρίας την $x=-\frac{3}{2}$, τέμνει τον Οx στο -2,-1 ακι τον Οy στο (0,2).

Εστω $N(x,y)$ και $N'(x,z)$ τα σημεία των (C) και(C΄) αντίστοιχα που έχουν όμως την ίδια τετμημένη.Εχουμε ότι $\overline{NN'}=z-y=E$.Αρα το πρόσημο της Ε εξαρτάται απ'τομ προσανατολισμό του διανύσματος $\overrightarrow{NN'}$. Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο καμπύλες (C) και (C΄) , τέμνονται στα Α και Β, των οποίων οι τετμημένες είναι λύσεις της $2x(x+2)=(x+2)(1-x)$ δηλ. -2 και 1.Εχουμε λοιπόν στο Α,$y=z=0$ και στο Β,$y=z=6$. Βλέπουμε λοιπόν απ'τη γραφική παράσταση ότι η (C΄) βρίσκεται "κάτω" από την (C),όταν $-2<x<1$.Αρα η $E=\overline{NN'}$είναι θετική.

3. Πρέπει για μέγιστη=8: $\alpha<0$ και $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=8$ (1)

Για να περνάει δε από τα Α(-2,0) και Β(1,6) να ισχύουν

$$\left.\begin{array}{l} 0=4\alpha-2\beta+\gamma \;(2) \\ 6=\alpha+\beta+\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta=\alpha+2 \\ \gamma=4-2\alpha \end{array}$$ και μέσω της (1)

$4\alpha(4-2\alpha)-(\alpha+2)^2=32\alpha$ ή $9\alpha^2+20\alpha+4=0$ με

ρίζες τα $\alpha'=-2$ και $\alpha''=-\frac{2}{9}$.Αρα υπάρχουν δύο συναρτήσεις που να πληρούν τα ζητούμενα:η

$y'=-2x^2+8$ και η $y''=-\frac{2}{9}(x^2-8x-20)$.

4. Η $y=\mu(x+2)$ πληρείται απότις συντεταγμένες του Α(-2,0).Αρα περνάει απ' αυτό.Επίσης τέμνει την (C΄)

στο Μ'που έχει τετμημενη την λύση της $\mu(x+2)=(x+2)(x+1)$ δηλ.την μ-1.Ομοίως την (C)στο σημειο Μ με τετμημένη $\frac{\mu}{2}$

Δηλ. $M\left(\frac{\mu}{2},\ \mu\left(\frac{\mu}{2}+2\right)\right)$ $M'(\mu-1,\mu(\mu+1))$.

Οι συντεταγμένες του μεσου P του ΜΜ'είναι

$x=\frac{3\mu-2}{4}$ $y=\frac{3\mu(\mu+2)}{4}$.Απαλείφοντας το μ

απ'τις δύο εξισώσεις έχω $y=\frac{2}{3}(2x^2+5x+2)$.(γ. τόπος)

Η γραφική παράσταση του γ. τόπου είναι γνωστή παραβολή.

10

Εστω α, τοξο εκφρασμένο σε ακτίνα, και $0\leq a\leq\frac{\pi}{2}$.

στο οποίο αντιστοιχούμε την καμπύλη (γραφική παράσταση) της συνάρτησης $y=x^2-2x\sigma\upsilon\nu a+1-\eta\mu a$.

1. Για ποιες τιμές του α, οι αντίστοιχες καμπύλες εφάπτονται στον άξονα Οx;Να χαραχτούν αυτές οι καμπύλες στο ίδιο σύστημα και να βρεθούν οι συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

2. Δείξτε ότι για όλες τις άλλες τιμές του α, η γραφική παράσταση της y,τέμνει τον Οx σε δύο σημεία P'και P''με θετικες τετμημένες.

3. Για ποιές τιμές του α, οι τετμημένες x'και x'' του P'και P''πληρούν τη σχέση $x'^2+x''^2=2$;

4. Ποιά σχέση ανεξάρτητη του α, πληρούν τα x', x'';

5. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των καμπύλων που αντιστοιχούν σε ένα τόξο α $\left(a\neq\frac{\pi}{4}\right)$ και στο συμπληρωματικό του.

ΛΥΣΗ

1. Πρέπει η εξίσωση $x^2-2x\sigma\upsilon\nu a+1-\eta\mu a=0$ (1) να έχει μια διπλή ρίζα. Δηλ. $\Delta'=\sigma\upsilon\nu^2 a-1+\eta\mu a=\eta\mu a(1-\eta\mu a)=0 \Rightarrow$ $a=0$ ή $a=\frac{\pi}{2}$ Για τις τιμές αυτές του α, η συνάρτηση παίρνει τις ακόλουθες μορφές.

$y_1=x^2$ αν $a=\frac{\pi}{2}$ και $y_2=(x-1)^2$ αν $a=0$

Οι καμπύλες (C_1) και (C_2) είναι δύο παραβολές απλής κατασκευής. Η (C_1) περνάει από τηναρχή των αξόνων και η (C_2) απ'το το (1,0)(κορυφή). Το κοινό τους σημείο έχει τετμημένη την λύση της $x^2=(x-1)^2$ δηλ. είναι το $A(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

2. Στις άλλες τιμές του α, η Δ' είναι θετική. Αρα η εξίσωση (1) δέχεται δυο ρίζες και επομένως η γραφική παράσταση τέμνει τον Οx σε δύο σημεία τα P' και P'' των οποίων οι τετμημένες είναι οι δύο ρίζες της (1).

Οι ριζες αυτές είναι θετικές άρα τα σημεία έχουν θετικές τετμημένες.

3. Εχω $x'+x''=2\sigma\upsilon\nu a$ και $x'x''=1-\eta\mu a$.
Αρα η δοθεισα $x'^2+x''^2=2$ γράφεται $(x'+x'')^2-2x'x''=2$ και
$4\sigma\upsilon\nu^2 a-2(1-\eta\mu a)-2=0 \Rightarrow 4(\sigma\upsilon\nu^2 a-1)+2\eta\mu a=0$ η
$\eta\mu a(1-2\eta\mu a)=0$ άρα $a=0$ ή $a=\frac{\pi}{6}$ Στη πρώτη περίπτωση έχω $x'=x''=1$ άρα $x'^2+x''^2=2$ στη δεύτερη τα x', x'', είναι ρίζες της $x^2-\sqrt{3}x+\frac{1}{2}=0$ δηλ. $x'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ $x''=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ άρα $x'^2+x''^2=$
$2\left(\frac{3+1}{4}\right)=2$

4. απ τις $x'+x''=2\sigma\upsilon\nu a$ και $x'x''=1-\eta\mu a$ έχω $\sigma\upsilon\nu a=\frac{x'+x''}{2}$ και $\eta\mu a=1-x'x''$. άρα ισχύει $\frac{(x'+x'')^2}{4}+(1-x'x'')^2=1$

δηλ. $x'^2+x''^2+4x'^2x''^2-6x'x''=0$

5. Οι συντεταγμένες ενός τέτοιου σημείου είναι η λύση του παρακάτω συστήματος.

$y=x^2-2x\text{συν}a+1-\text{ημ}a$

$y=x^2-2x\text{ημ}a+1-\text{συν}a$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκω το x

(2) $2x(\text{συν}a-\text{ημ}a)+\text{ημ}a-\text{συν}a=0$ δηλ.αν $a\neq\frac{\pi}{4}$ $x=\frac{1}{2}$ οπότε

$y=\frac{5}{4}-\text{συν}a-\text{ημ}a$.

Αν $a=\frac{\pi}{4}$ η (2) είναι αόριστη, οπότε οι δύο καμπύλες ταυτίζονται.

11

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) $ax^2+\beta x+\gamma=0$ και το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\beta x+2ay=0\\ 2\gamma x+\beta y=0\end{array}\right\}\ (2)$$

Ονομάζουμε S_1 το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης (1) και S_2 το σύνολο των λύσεων του συστήματος (2).

1. Να δειχτεί ότι αν το πλήθος των στοιχείων του S_1 είναι 2, τότε το αντίστοιχο πλήθος του S_2 είναι 1.
2. Είναι το αντίστροφο αληθές;
3. Να βρεθεί το σύνολο S_2 αν το πλήθος του S_1 είναι 1.

(Classes de première A et B).

ΛΥΣΗ

1. Εστω Δ η διακρίνουσα της (1) και D η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του (2). Τότε $\Delta=\beta^2-4a\gamma$

$D=\begin{vmatrix}\beta & 2a\\ 2\gamma & \beta\end{vmatrix}=\beta^2-4a\gamma$ δηλ. $\Delta=D$ Το πλήθος του S_1 είναι 2 αν και μονο αν η Δ είναι θετική το οποίο ση-

μαίνει $D \neq 0$.Και επειδή το σύστημα (2) είναι ομογενές, έχουμε ότι $S_2 = \{(0,0)\}$ Δηλ. το πλήθος του S_2 είναι 1.

2. Το πλήθος του S_2 είναι 1, αν και μονο αν έχουμε $D \neq 0$ δηλ. $\Delta \neq 0$.Δηλ. είναι δυνατόν $\Delta > 0$ η $\Delta < 0$

Αρα το πλήθος του S_1 είναι 2 η 0.Δηλ. το αντίστροφο που ζητάει η άσκηση δεν ισχύει.

3. Το πλήθος του S_1 είναι 1 αν $\Delta = 0$ οπότε $D = 0$ Αρα τοτε το σύστημα (2) που είναι ομογενές έχει άπειρες λύσεις που περιγράφοντια απ'το $S_2 = \{(x,y)\ x \in R\ y = -\frac{\beta}{2a}x\}$.

12.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_{(x)} = x^2 - 2x + 3$ και $g_{(x)} = -2x^2 + 10x - 9$.

1. Να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων.Εστω C και C' οι αντίστοιχες καμπύλες.

2. Να δειχτεί ότι C οι C' και έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη 2, και ότι δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

Λ Υ Σ Η

Οι πίνακες μεταβολών τους είναι

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$F_{(x)}$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$G_{(x)}$	$-\infty$	↗	$7/2$	↘	$-\infty$

Η(C) γραφικά είναι παραβολή με τα "κοίλα άνω", με κορυφή το (1,2) και τέμνει το Oy στο (0,3). Η(C′) στρέφει τα "κοίλα κάτω" έχει κορυφή το $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ και τέμνει τον Ox στις ρίζες της $-2x^2+10x-9=0$

2. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των δύο καμπύλων είναι οι λύσεις της $x^2-2x+3=-2x^2+10x-9$ δηλ.

$x=2$. Αρα έχουμε 1 κοινό σημείο το A(2,3).

Στο σημείο A έχουμε $F'_{(2)} = G'_{(2)} = 2$. Αρα οι δύο καμπύλες έχουν κοινή εφαπτόμενη στο A που δίνεται από την εξίσωση : $y-3=2(x-2)$ η $y=2x-1$

Επειδή δε και $F_{(2)} = G_{(2)}$ έχουμε ότι οι δύο καμπύλες (C) και (C′) εφάπτονται στο σημείο A.

13 Γ΄Λυκείου

Δίνεται η συνάρτηση $F_{(x)}=x^2-|x|-2$

1. Να δειχτεί ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0)
2. Να παρασταθεί γραφικά.

(Classes de premiere A et B)

ΛΥΣΗ

1. Παράγωγος απο δεξιά στο σημείο 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x-2+2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x-1) = -1$$

...ΤΙΝΟΣ

Παράγωγος απο αριστερά στο σημείο 0.

$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} (x+1)=1$ Αρα δεν υπάρχει παράγωγος στο X=0.

2. Επειδή $F_{(-x)}=F_{(x)}$ η συνάρτηση είναι άρτια. Αρα η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy. Θα μελετήσουμε λοιπόν μόνο στο R+.

Ο πίνακας μεταβολών για την $F_{(x)}=x^2-x-2$ στο R+ είναι

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_{(x)}$	-2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

Η γραφική της λοιπόν παράσταση είναι τμήμα παραβολής που τέμνει τον Oy στο A(0,-2) έχει κορυφή το $B(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$ και τέμνει τον Ox στο (2,0) κ.λ.π.

17

Να γραφούν δύο εξισώσεις δευτέρου βαθμού έτσι ώστε οι ρίζες της κάθε μιας να είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της άλλης.

(Ecole des hautes études Commerciales).

ΛΥΣΗ

Εστω (E) $x^2-px+q=0$ και

(E′) $x^2-p'x+q'=0$ δύο εξισώσεις που πληρούν τα δεδομένα του προβλήματος. Οι ρίζες της (E) έστω οι p′ και q′, και της (E′) οι p και q. Εχουμε

(1) $p'+q'=p$ (3) $p+q=p'$ Προσθέτοντας κατά μέλη

(2) $p'q'=q$ (4) $pq=q'$ τις (1) και (3) καθώς και τις (2) και (4) έχουμε

$q+q'=0$ ή $q+q'=0$
$pq+p'q=0$ $q(p-p')=0$ Αν λοιπόν $q=0$ άρα $q'=0$ οι εξισώσεις (1) και (3) γίνονται η σχέση $p=p'$. Τότε οι εξισώσεις (E) και (E') γίνονται $(E_1): x^2-px=0$ $(E_1'): x^2-px=0$, με p τυχόντα, που πληρούν τις προϋποθέσεις.

Αν, αφ'ετέρου, $p-p'=0$ δηλ. $p=p'$ οι εξισώσεις (1) και (3) γίνονται $q'=0$, $q=0$ και βρίσκουμε τις ίδιες εξισώσεις (E_1) και (E_1') όπως προηγουμένως, οι οποίες είναι και μοναδικές.-

15

Δίνεται η πραγματική παράμετρος α ώστε $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ και θεωρούμε την εξίσωση με άγνωστο το
x: $x^2-4x\eta\mu\alpha+2(1-\sqrt{3})\eta\mu\alpha+\sqrt{3}=0$

Να μελετηθούν οι τιμές του α, για τις οποίες αυτή η εξίσωση δέχεται μια διπλή ρίζα. Για ποιά α, έχει δύο ρίζες διακεκριμένες;

(Classes de prèmiere C, D et E).

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\Delta'=4\eta\mu^2\alpha+2(\sqrt{3}-1)\eta\mu\alpha-\sqrt{3}$
ή $\Delta'=4\left(\eta\mu\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\eta\mu\alpha-\frac{1}{2}\right)$ Άρα

$\Delta'=0$ $\left(\eta\mu\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ ή $\left.\eta\mu\alpha=\frac{1}{2}\right)$ και $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ άρα

$\alpha=\frac{4\pi}{2}$ η $\alpha=\frac{5\pi}{3}$ και $\alpha=\frac{\pi}{6}$ η $\alpha=\frac{5\pi}{6}$

Οι ζητούμενες λοιπόν τιμές της παραμέτρου α είναι

οι $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ και $\frac{5\pi}{3}$.

Για να έχουμε διακεκριμένες ρίζες πρέπει $\Delta' > 0$ δηλ. $\eta\mu\alpha > \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ με $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Αρα έχουμε τα διαστήματα $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ και $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

1. Εστω η εξίσωση

$$(1)\quad x^2-2\text{συνφ}x+(2-\sqrt{3})(1-4\text{ημ}^2\varphi)=0$$

οπου $0<\varphi<\pi$.

1. Να μελετηθεί το πλήθος και το πρόσημο των ριζών.
2. Εστω η γωνία $XO\Psi=\frac{\pi}{6}$. ΣΤην περίπτωση που οι ρίζες

της (1) είναι θετικές, ονομάζουμε Α και Β τα σημεία των Οx και Οψ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ=x' και ΟΒ=x''.Να υπολογιστεί το ΑΒ, καθώς και η ακτίνα του περιγεγραμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΟΒ.

(Suget de concours, école Breguet).

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=x^2+2(3\mu+5)x+3\mu+25$.

1.Για ποιές τιμές του μ, η αντίστοιχη καμπύλη τέμνει (Pμ) τον Οx;

2. Οταν η (Pμ) τέμνει τον Οx σε δύο σημεία Μ'και Μ'' να δειχτεί ότι υπάρχει πάνω στον άξονα των x, ένα σημείο Α έτσι ώστε $\overline{AM'}.\overline{AM''}=\frac{\kappa^2}{4}$, οπού κ μια σταθερή η οποία να προσδιοριστεί.

3. Να κατασκευαστούν οι καμπύλες (Pο) και (P_{-3})

που αντιστοιχούν στις τιμές μ=0 και μ=-3. Τι ιδιομορφία παρουσιάζουν;Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των

σημείων τομής τους.

4. Να δειχτεί ότι όταν το μ διατρέχει το R ο γ. τόπος των κορυφών των (Pμ) είναι μια παραβολή.

(Bacc. 1re partie, Série tech. B, Dakar)

---

3. Εστω (P) και (P') οι καμπύλες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$y_1=(x+\mu-3)^2-4$ και $y_2=(x+2\mu)^2-4$ αντίστοιχα.

1. Να κατασκευαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι καμπύλες (P_0) και (P'_0) που αντιστοιχούν στην τιμή μ=0

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο αυτών καμπύλων.

Να δειχτεί ότι οι (Po) και (P'_0) είναι συμμετρικ ως προς άξονα, παράλληλον του Oy

2. Ποιός είναι ο γ. τόπος των κορυφών των καμπύλων (P) και (P') όταν το μ μεταβάλλεται;

Να υπολογιστούν συνάρτηση του μ, οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των καμπύλων (P) και (P'). Για ποιά τιμή του μ, οι δύο καμπύλες ταυτίζονται;

(Baec. 1re partie, série tech. A, Alger).

4. 1. Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση

(E) : $συν^2x+2μημx-ρ=0$ όπου μ και ρ παράμετροι.

2. Θεωρώντας τα μ και ρ, σαν συντεταγμένες ενός σημείου Μ, σε ορθογώνιο συστημα, στο επίπεδο, ερμηνέψτε γραφικά, τα αποτελέσματα της προηγούμενης διερεύνησης λαμβάνοντας υπ' όψη τη θέση του σημείου Μ στο επίπεδο.

3. Εξετάστε την ειδική περίπτωση οπου ρ=μ+1.

4. Να παρασταθεί γραφικά η $y = \frac{x^2}{x-1}$.

5. Με τη βοήθεια της καμπύλης αυτής, επαληθέψτε γραφικά τα πορίσματα του ερωτήματος 3.

(Bacc. Math. Dakar)

5. 1. Να παρασταθεί γραφικά η $y=x(4-x)$

2. Μια ευθεία, με κλίση 1 και τεταγμένη επί την αρχή μ, τέμνει την καμπύλη (C) σε δύο σημεία ,τα M και N, ενώ η παράμετρος είναι μικρότερη από μια τομή μο, η οποία να προσδιοριστεί.

3. Ποιός είναι ο γ. τόπος του μεσου I, του MN συναρτήσει του μ.

4. Εκφράστε το τετράγωνο της απόστασης MN συναρτήσει του μ.

5. Να προσδιοριστεί το μ, ώστε η αποσταση του I και της κορυφής S της καμπύλης(C)ισούται με το μισό του MN.

(Bacc. 1re partie, series c1 Montréal).

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F_{(x)} = \mu x^2 - 2(\mu-1)x + \mu - 2$ οπου $\mu \in R$

1. Εστω g η συνάρτηση που προκύπτει για $\mu=0$ και (D) η γραφική της παράσταση.Να βρεθούν τα σημεία τομής της με τους αξονες του συστήματος, καθώς και να χαρακτεί η (D).

2. Εστω $F_{(x)}$ η συνάρτηση που προκύπτει για $\mu=\frac{1}{2}$ και (C) η γραφική της παράσταση.Ομοίως να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες κα να χαραχτεί η (C).

3. Να δειχτεί ότι η (D) είναι εφαπτόμενη της (C) σε κάποιο σημείο της.

4. Να δειχτεί ότι η (3) ισχύει για όλες τις συναρτήσεις που προκύπτουν από την $F_{(x)}$ για $\mu \neq 0$.